Algorithmen und Datenstrukturen 2

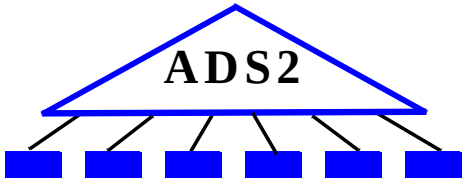
Prof. Dr. E. Rahm

Sommersemester 2002

Universität Leipzig

Institut für Informatik

http://dbs.uni-leipzig.de



Zur Vorlesung allgemein

- Vorlesungsumfang: 2 + 1 SWS
- Vorlesungsskript
  - im WWW abrufbar (PDF, PS und HTML)
  - Adresse *http://dbs.uni-leipzig.de*
  - ersetzt nicht die Vorlesungsteilnahme oder zusätzliche Benutzung von Lehrbüchern
- Übungen
  - Durchführung in zweiwöchentlichem Abstand
  - selbständige Lösung der Übungsaufgaben wesentlich für Lernerfolg
  - Übungsblätter im WWW
  - praktische Übungen auf Basis von Java
- Vordiplomklausur ADS1+ADS2 im Juli
  - Zulassungsvoraussetzungen: Übungsschein ADS1 + erfolgreiche Übungsbearbeitung ADS2
  - erfordert fristgerechte Abgabe und korrekte Lösung der meisten Aufgaben sowie Bearbeitung aller Übungsblätter (bis auf höchstens eines)

Termine Übungsbetrieb

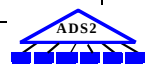
- Ausgabe 1. Übungsblatt: Montag, 8. 4. 2002; danach 2-wöchentlich
- Abgabe gelöster Übungsaufgaben bis spätestens Montag der übernächsten Woche, 11:15 Uhr
  - vor Hörsaal 13 (Abgabemöglichkeit 11:00 - 11:15 Uhr)
  - oder früher im Fach des Postschranks HG 2. Stock, neben Raum 2-22
  - Programmieraufgaben: dokumentierte Listings der Quellprogramme sowie Ausführung
- 6 Übungsgruppen

Nr.	Termin	Woche	Hörsaal	**Beginn**	Übungsleiter	#Stud.
1	Mo, 17:15	A	HS 16	**22.4.**	Richter	60
2	Mo, 9:15	B	SG 3-09	**29.4.**	Richter	30
3	Di, 11:15	A	SG 3-07	**23.4.**	Böhme	30
4	Di, 11:15	B	SG 3-07	**30.4.**	Böhme	30
5	Do, 11.15	A	SG 3-05	**25.4.**	Böhme	30
6	Do, 11.15	B	SG 3-05	**2.5.**	Böhme	30

  - Einschreibung über Online-Formular
  - Aktuelle Infos siehe WWW

Ansprechpartner ADS2

- Prof. Dr. E. Rahm
  - während/nach der Vorlesung bzw. Sprechstunde (Donn. 14-15 Uhr), HG 3-56
  - rahm@informatik.uni-leipzig.de
- Wissenschaftliche Mitarbeiter
  - Timo Böhme, boehme@informatik.uni-leipzig.de, HG 3-01
  - Dr. Peter Richter, prichter@informatik.uni-leipzig.de, HG 2-20
- Studentische Hilfskräfte
  - Tilo Dietrich, TiloDietrich@gmx.de
  - Katrin Starke, katrin.starke@gmx.de
  - Thomas Tym, mai96iwe@studserv.uni-leipzig.de
- Web-Angelegenheiten:
  - S. Jusek, juseks@informatik.uni-leipzig.de, HG 3-02



Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

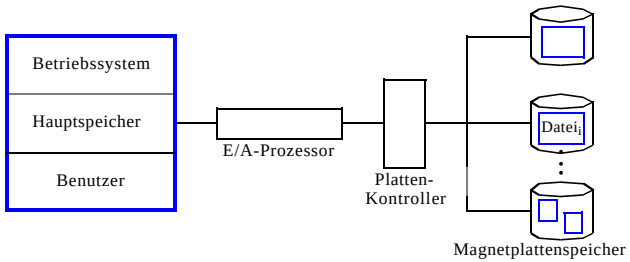
Literatur

Das intensive Literaturstudium zur Vertiefung der Vorlesung wird dringend empfohlen.
Auch Literatur in englischer Sprache sollte verwendet werden.

- *T. Ottmann, P. Widmayer:* Algorithmen und Datenstrukturen, Reihe Informatik, Band 70, BI-Wissenschaftsverlag, 4. Auflage, Spektrum-Verlag, 2002
- Weitere Bücher
  - *V. Claus, A. Schwill:* Duden Informatik, BI-Dudenverlag, 3. Auflage 2001
  - *D.A. Knuth:* The Art of Computer Programming, Vol. 3, Addison-Wesley, 1973
  - *R. Sedgewick:* Algorithmen. Addison-Wesley 1992
  - *G. Saake, K. Sattler:* Algorithmen und Datenstrukturen - Eine Einführung mit Java. dpunkt-Verlag, 2002
  - *M.A. Weiss:* Data Structures & Problem Solving using Java. Addison-Wesley, 2. Auflage 2002

Suchverfahren für große Datenmengen

- bisher betrachtete Datenstrukturen (Arrays, Listen, Binärbäume) und Algorithmen waren auf im Hauptspeicher vorliegende Daten ausgerichtet
- effiziente Suchverfahren für große Datenmengen auf Externspeicher erforderlich (persistente Speicherung)
  - große Datenmengen können nicht vollständig in Hauptspeicher-Datenstrukturen abgebildet werden
  - Zugriffsgranulat sind Seiten bzw. Blöcke von Magnetplatten : z.B. 4-16 KB
  - Zugriffskosten 5 Größenordnungen langsamer als für Hauptspeicher (5 ms vs. 50 ms)

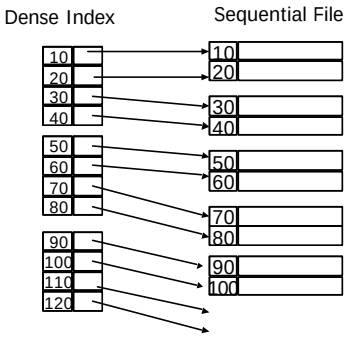


Sequentieller Dateizugriff

- Sequentielle Dateiorganisation
  - Datei besteht aus Folge gleichartiger Datensätze
  - Datensätze sind auf Seiten/Blöcken gespeichert
  - ggf. bestimmte Sortierreihenfolge (bzgl. eines Schlüssels) bei der Speicherung der Sätze (sortiert-sequentielle Speicherung)
- Sequentieller Zugriff
  - Lesen aller Seiten / Sätze vom Beginn der Datei an
  - sehr hohe Zugriffskosten, v.a. wenn nur ein Satz benötigt wird
- Optimierungsmöglichkeiten
  - „dichtes Packen“ der Sätze innerhalb der Seiten (hohe Belegungsdichte)
  - Clusterung zwischen Seiten, d.h. „dichtes Packen“ der Seiten einer Datei auf physisch benachbarte Plattenbereiche, um geringe Zeiten für Plattenzugriffsarm zu ermöglichen
- Schneller Zugriff auf einzelne Datensätze erfordert Einsatz von zusätzlichen *Indexstrukturen,* z.B. Mehrwegbäume
- Alternative: gestreute Speicherung der Sätze (-> Hashing)

Dichtbesetzter vs. dünnbesetzter Index

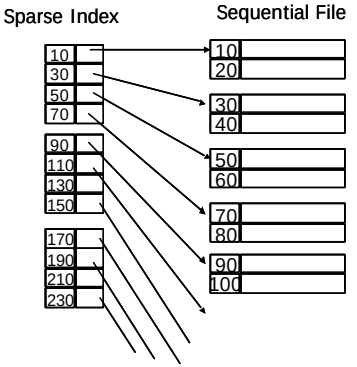
- Dichtbesetzter Index (dense index)
  - für jeden Datensatz existiert ein Eintrag in Indexdatei
  - höherer Indexaufwand als bei dünnbesetztem Index
  - breiter anwendbar, u.a auch bei unsortierter Speicherung der Sätze
  - einige Auswertungen auf Index möglich, ohne Zugriff auf Datensätze (Existenztest, Häufigkeitsanfragen, Min/Max-Bestimmung)



- Anwendungsbeispiel
  - 1 Million Sätze, B=20, 200 Indexeinträge pro Seite
  - Dateigröße:
  - Indexgröße:
  - mittlere Zugriffskosten:

Dichtbesetzter vs. dünnbesetzter Index (2)

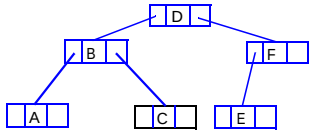
- Dünnbesetzter Index (sparse index)
  - nicht für jeden Schlüsselwert existiert Eintrag in Indexdatei
  - sinnvoll v.a. bei Clusterung gemäß Sortierreihenfolge des Indexattributes: ein Indexeintrag pro Datenseite



- indexsequentielle Datei (ISAM): sortierte sequentielle Datei mit dünnbesetztem Index für Sortierschlüssel
- Anwendungsbeispiel
  - 1 Million Sätze, B=20, 200 Indexeinträge pro Seite
  - Dateigröße:
  - Indexgröße:
  - mittlere Zugriffskosten:
- Mehrstufiger Index
  - Indexdatei entspricht sortiert sequentieller Datei -> kann selbst wieder indexiert werden
  - auf höheren Stufen kommt nur dünnbesetzte Indexierung in Betracht
  - beste Umsetzung im Rahmen von Mehrwegbäumen (B-/B*-Bäume)

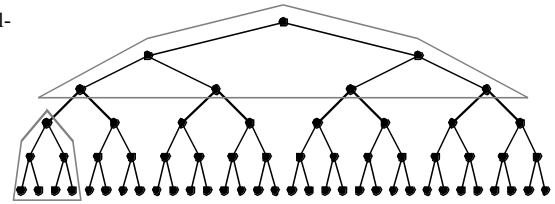
Mehrwegbäume

- Ausgangspunkt: Binäre Suchbäume (balanciert)
  - entwickelt für Hauptspeicher
  - ungeeignet für große Datenmengen



- Externspeicherzugriffe erfolgen auf Seiten
  - Abbildung von Schlüsselwerten/Sätzen auf Seiten
  - Index-Datenstruktur für schnelle Suche

Beispiel: Zuordnung von Binärbaum-Knoten zu Seiten

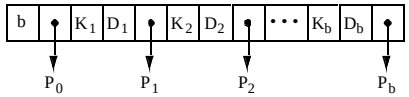


- Alternativen:
  - m-Wege-Suchbäume
  - B-Bäume
  - B*-Bäume
- Grundoperationen: Suchen, Einfügen, Löschen
- Kostenanalyse im Hinblick auf Externspeicherzugriffe

m-Wege-Suchbäume

- **Def.:** Ein m-Wege-Suchbaum oder ein m-ärer Suchbaum B ist ein Baum, in dem alle Knoten einen Grad ≤ m besitzen. Entweder ist B leer oder er hat folgende Eigenschaften:

(1) Jeder Knoten des Baums mit b Einträgen, $b \le m - 1$, hat folgende Struktur:



Die P_i, $0 \le i \le b$, sind Zeiger auf die Unterbäume des Knotens und die K_i und D_i, $1 \le i \le b$ sind Schlüsselwerte und Daten.

(2) Die Schlüsselwerte im Knoten sind aufsteigend geordnet: $K_i \le K_{i+1}$, $1 \le i < b$.

(3) Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_i sind kleiner als der Schlüsselwert K_{i+1}, $0 \le i < b$.

(4) Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_b sind größer als der Schlüsselwert K_b.

(5) Die Unterbäume von P_i, $0 \le i \le b$ sind auch m-Wege-Suchbäume.

- Die D_i können Daten oder Zeiger auf die Daten repräsentieren
  - direkter Index: eingebettete Daten (weniger Einträge pro Knoten; kleineres m)
  - indirekter Index: nur Verweise; erfordert separaten Zugriff auf Daten zu dem Schlüssel

m-Wege-Suchbäume (2)

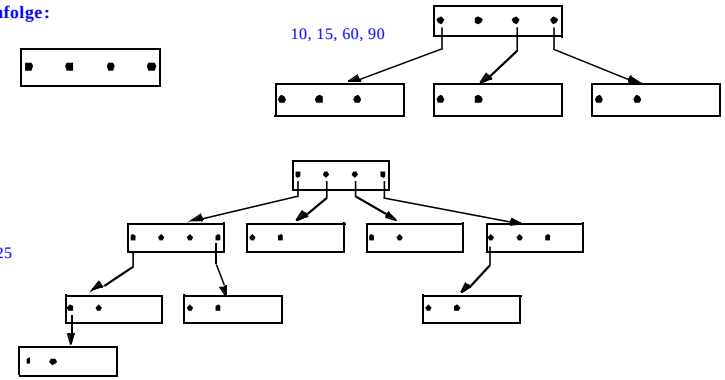
- **Beispiel:** Aufbau eines m-Wege-Suchbaumes (m = 4)

Einfügereihenfolge:

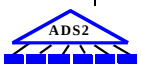
30, 50, 80

10, 15, 60, 90

20, 35, 5, 95, 1, 25



- Beobachtungen
  - Die Schlüssel in den inneren Knoten besitzen zwei Funktionen. Sie identifizieren Daten(sätze) und sie dienen als Wegweiser in der Baumstruktur
  - Der m-Wege-Suchbaum ist im allgemeinen nicht ausgeglichen



m-Wege-Suchbäume (3)

- Wichtige Eigenschaften für alle Mehrwegbäume:

  $S(P_i)$ sei die Seite, auf die P_i zeigt, und $K(P_i)$ sei die Menge aller Schlüssel, die im Unterbaum mit Wurzel $S(P_i)$ gespeichert werden können. Dann gelten folgende Ungleichungen:

  (1) $x \in K(P_0): \quad x < K_1$

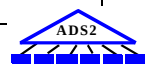
  (2) $x \in K(P_i): \quad K_i < x < K_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, b-1$

  (3) $x \in K(P_b): \quad K_b < x$

- Kostenanalyse
  - Die Anzahl der Knoten N in einem vollständigen Baum der Höhe h, $h \geq 1$, ist

    $$N = \sum_{i=0}^{h-1} m^i = \frac{m^h - 1}{m - 1}$$

  - Im ungünstigsten Fall ist der Baum völlig entartet: $n = N = h$
  - Schranken für die Höhe eines m-Wege-Suchbaums: $\log_m(n+1) \leq h \leq n$



m-Wege-Suchbäume (4)

- Definition des Knotenformats:

```
class MNode {
  int m;              // max. Grad des Knotens (m)
  int b;              // Anzahl der Schluessel im Knoten (b <= m-1)
  Orderable[] keys;   // Liste der Schluessel
  Object[] data;     // Liste der zu den Schluesseln gehoerigen Datenobjekte
  MNode[] ptr;        // Liste der Zeiger auf Unterbaeume

  /** Konstruktor */
  public MNode(int m, Orderable key, Object obj) {
    this.m = m; b = 1;
    keys = new Orderable[m-1];
    data = new Object[m-1];
    ptr = new MNode[m];
    keys[0] = key;  // Achtung: keys[0] entspricht K1, keys[1] K2, ...
    data[0] = obj;  // Achtung: data[0] entspricht D1, data[1] D2, ...
  } }
```

- Rekursive Prozedur zum Aufsuchen eines Schlüssels

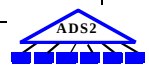
```
public Object search(Orderable key, MNode node) {
    if ((node == null) || (node.b < 1)) {
      System.err.println("Schluessel nicht im Baum.");
      return null; }
```



```
    if (key.less(node.keys[0]))
      return search(key, node.ptr[0]);       // key < K1

    if (key.greater(node.keys[node.b-1]))
      return search(key, node.ptr[node.b]);  // key > Kb

    int i=0;
    while ((i<node.b-1) && (key.greater(node.keys[i])))
        i++;                                 // gehe weiter, solange key > Ki+1

    if (key.equals(node.keys[i]))
      return node.data[i];                   // gefunden

    return search(key, node.ptr[i]);   // Ki < key < Ki+1
  }
```

- Durchlauf eines m-Wege-Suchbaums in symmetrischer Ordnung

```
public void print(MNode node) {
    if ((node == null) || (node.b < 1)) return;
    print(node.ptr[0]);
    for (int i=0; i<node.b; i++) {
      System.out.println("Schluessel: " + node.keys[i].getKey() +
                         " \tDaten: " + node.data[i].toString());
      print(node.ptr[i+1]);
    } }
```

Mehrwegbäume

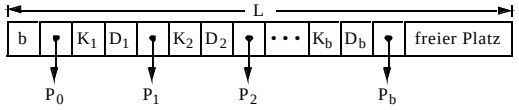
- Ziel: Aufbau sehr breiter Bäume von geringer Höhe
  - in Bezug auf Knotenstruktur vollständig ausgeglichen
  - effiziente Grundoperationen auf Seiten (= Transporteinheit zum Externspeicher)
  - Zugriffsverhalten weitgehend unabhängig von Anzahl der Sätze

  ⇒ Einsatz als Zugriffs-/Indexstruktur für 10 als auch für 10^{10} Sätze
- Grundoperationen:
  - direkter Schlüsselzugriff auf einen Satz
  - sortiert sequentieller Zugriff auf alle Sätze
  - Einfügen eines Satzes; Löschen eines Satzes
- Varianten
  - ISAM-Dateistruktur (1965; statisch, periodische Reorganisation)
  - Weiterentwicklungen: B- und B*-Baum
  - B-Baum: 1970 von R. Bayer und E. McCreight entwickelt

  ⇒ dynamische Reorganisation durch Splitten und Mischen von Seiten
- Breites Spektrum von Anwendungen ("The Ubiquitous B-Tree")
  - Dateiorganisation ("logische Zugriffsmethode", VSAM)
  - Datenbanksysteme (Varianten des B*-Baumes sind in allen DBS zu finden!)
  - Text- und Dokumentenorganisation . . .

B-Bäume

- **Def.:** Seien k, h ganze Zahlen, $h \geq 0$, $k > 0$.
  Ein B-Baum B der Klasse $\tau(k, h)$ ist entweder ein leerer Baum oder ein geordneter Baum mit folgenden Eigenschaften:
  1. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Länge h-1.
  2. Jeder Knoten außer der Wurzel und den Blättern hat mindestens k+1 Söhne. Die Wurzel ist ein Blatt oder hat mindestens 2 Söhne
  3. Jeder Knoten hat höchstens 2k+1 Söhne
  4. Jedes Blatt mit der Ausnahme der Wurzel als Blatt hat mindestens k und höchstens 2k Einträge.
- Für einen B-Baum ergibt sich folgendes Knotenformat:



B-Bäume (2)

- Einträge
  - Die Einträge für Schlüssel, Daten und Zeiger haben die festen Längen l_b, l_K, l_D und l_p.
  - Die Knoten- oder Seitengröße sei L.
  - Maximale Anzahl von Einträgen pro Knoten: $b_{max} = \left\lfloor \frac{L - l_b - l_p}{l_K + l_D + l_p} \right\rfloor = 2k$
- Reformulierung der Definition

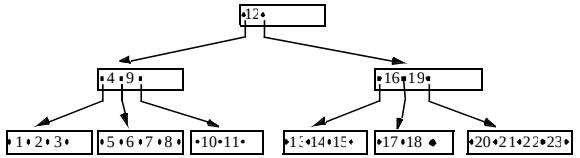
  (4) und (3). Eine Seite darf höchstens voll sein.

  (4) und (2). Jede Seite (außer der Wurzel) muß mindestens halb voll sein.
  Die Wurzel enthält mindestens einen Schlüssel.

  (1) Der Baum ist, was die Knotenstruktur angeht, vollständig ausgeglichen
- Balancierte Struktur:
  - unabhängig von Schlüsselmenge
  - unabhängig ihrer Einfügereihenfolge

B-Bäume (3)

- Beispiel: B-Baum der Klasse τ (2,3)



  - In jedem Knoten stehen die Schlüssel in aufsteigender Ordnung mit $K_1 < K_2 < \ldots < K_b$
  - Jeder Schlüssel hat eine Doppelrolle als Identifikator eines Datensatzes und als Wegweiser im Baum
  - Die Klassen τ(k,h) sind nicht alle disjunkt. Beispielsweise ist ein maximaler Baum aus τ(2,3) ebenso in τ(3,3) und τ(4,3) ist
- **Höhe h**: Bei einem Baum der Klasse τ(k,h) mit n Schlüsseln gilt für seine Höhe:

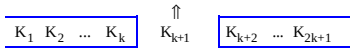
$$\log_{2k+1}(n+1) \leq h \leq \log_{k+1}((n+1)/2) + 1 \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\text{und} \quad h = 0 \quad \text{für } n = 0$$

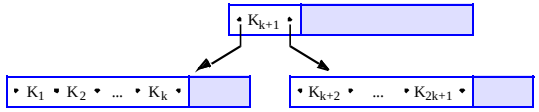
Einfügen in B-Bäumen

- Was passiert, wenn Wurzel überläuft ?

- Fundamentale Operation: Split-Vorgang
  1. Anforderung einer neuen Seite und
  2. Aufteilung der Schlüsselmenge nach folgendem Prinzip



  - mittlere Schlüssel (Median) wird zum Vaterknoten gereicht
  - Ggf. muß Vaterknoten angelegt werden (Anforderung einer neuen Seite).



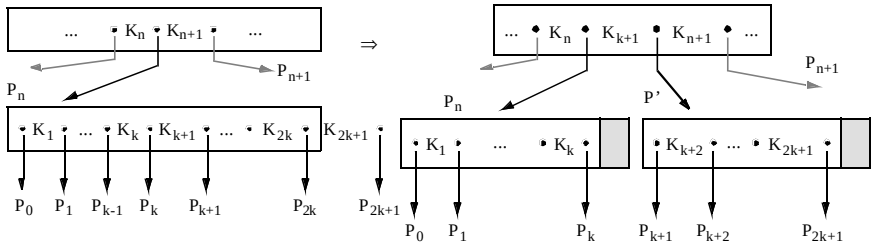
Split führt hier zu einer neuen Wurzel a

  - Blattüberlauf erzwingt Split-Vorgang, was Einfügung in den Vaterknoten impliziert
  - Wenn dieser überläuft, folgt erneuter Split-Vorgang
  - Split-Vorgang der Wurzel führt zu neuer Wurzel: Höhe des Baumes erhöht sich um 1

- Bei B-Bäumen ist Wachstum von den Blättern zur Wurzel hin gerichtet

Einfügen in B-Bäumen (2)

- Einfügealgorithmus (ggf. rekursiv)
  - Suche Einfügeposition
  - Wenn Platz vorhanden ist, speichere Element, sonst schaffe Platz durch Split-Vorgang und füge ein
- Split-Vorgang als allgemeines Wartungsprinzip



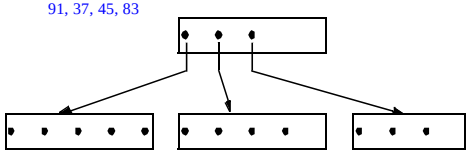
Einfügen in B-Bäumen (3)

- Aufbau eines B-Baumes der Klasse τ(2, h)

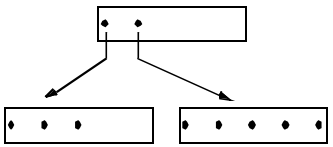
Einfügereihenfolge:

77, 12, 48, 69

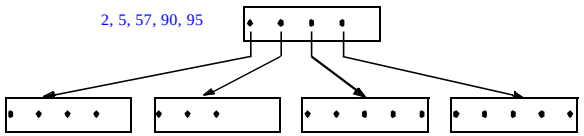
91, 37, 45, 83



33, 89, 97

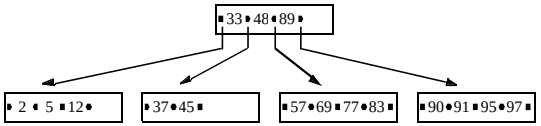


2, 5, 57, 90, 95

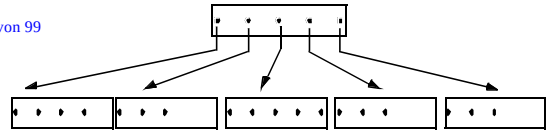


Einfügen in B-Bäumen (4)

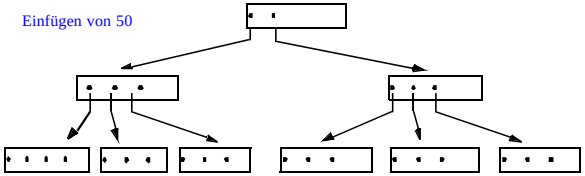
- Aufbau eines B-Baumes der Klasse τ(2, h)



Einfügen von 99



Einfügen von 50

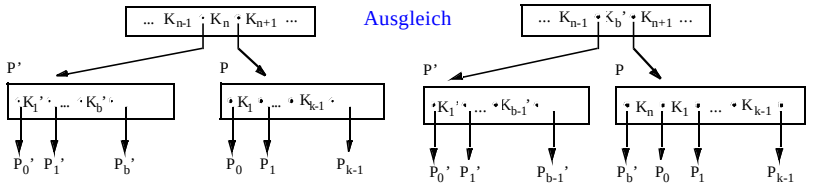


Kostenanalyse für Suche und Einfügen

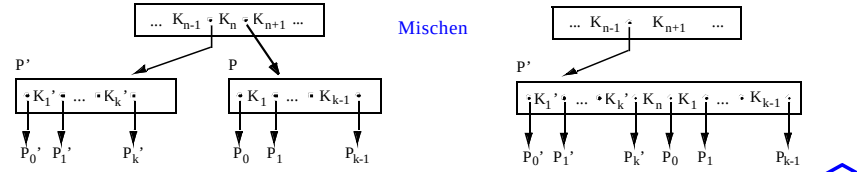
- Kostenmaße
  - Anzahl der zu holenden Seiten: f (fetch)
  - Anzahl der zu schreibenden Seiten (#geänderter Seiten): w (write)
- Direkte Suche
  - $f_{min} = 1$: der Schlüssel befindet sich in der Wurzel
  - $f_{max} = h$: der Schlüssel ist in einem Blatt
  - **mittlere Zugriffskosten** $h - \frac{1}{k} \le f_{avg} \le h - \frac{1}{2k}$ (für h > 1)
- Beim B-Baum sind die maximalen Zugriffskosten h eine gute Abschätzung der mittleren Zugriffskosten.
  - $\Rightarrow$ Bei h = 3 und einem k = 100 ergibt sich $2.99 \le f_{avg} \le 2.995$
- Sequentielle Suche
  - Durchlauf in symmetrischer Ordnung : $f_{seq} = N$
  - Pufferung der Zwischenknoten im Hauptspeicher wichtig!
- Einfügen
  - günstigster Fall - kein Split-Vorgang: $f_{min} = h$; $w_{min} = 1$
  - durchschnittlicher Fall: $f_{avg} = h$; $w_{avg} < 1 + \frac{2}{k}$

Löschen in B-Bäumen

- Die B-Baum-Eigenschaft muß wiederhergestellt werden, wenn die Anzahl der Elemente in einem Knoten kleiner als k wird.
- Durch **Ausgleich** mit Elementen aus einer Nachbarseite oder durch **Mischen** (Konkatenation) mit einer Nachbarseite wird dieses Problem gelöst.
  - Maßnahme 1: Ausgleich durch Verschieben von Schlüsseln (Voraussetzung: Nachbarseite P' hat mehr als k Elemente; Seite P hat k-1 Elemente)



  - Maßnahme 2: Mischen von Seiten



Löschen in B-Bäumen (2)

- Löschalgorithmus

(1) Löschen in Blattseite

- Suche x in Seite P
- Entferne x in P und wenn
  - a) #E ≥ k in P: tue nichts
  - b) #E = k-1 in P und #E > k in P': gleiche Unterlauf über P' aus
  - c) #E = k-1 in P und #E = k in P': mische P und P'.

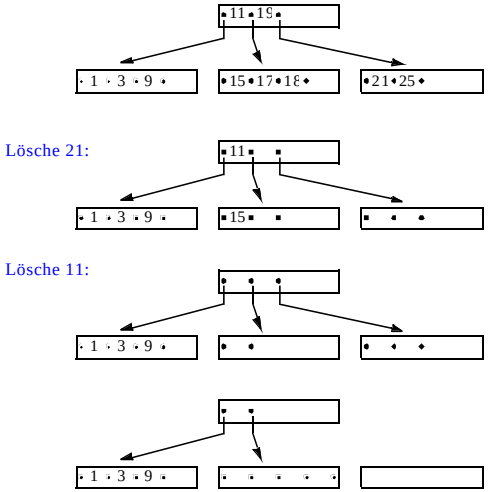
(2) Löschen in innerer Seite

- Suche x
- Ersetze $x = K_i$ durch kleinsten Schlüssel y in $B(P_i)$ oder größten Schlüssel y in $B(P_{i-1})$ (nächstgrößerer oder nächstkleinerer Schlüssel im Baum)
- Entferne y im Blatt P
- Behandle P wie unter 1

- Kostenanalyse für das Löschen
  - günstigster Fall: $f_{min} = h$; $w_{min} = 1$
  - obere Schranke für durchschnittliche Löschkosten (drei Anteile: 1. Löschen, 2. Ausgleich, 3. anteilige Mischkosten):

$$f_{avg} \le f_1 + f_2 + f_3 < h + 1 + \frac{1}{k} \qquad w_{avg} \le w_1 + w_2 + w_3 < 2 + 2 + \frac{1}{k} = 4 + \frac{1}{k}$$

Löschen in B-Bäumen: Beispiel

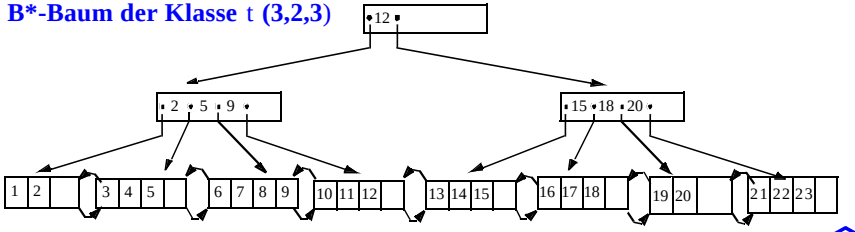


B*-Bäume

- Hauptunterschied zu B-Baum: in inneren Knoten wird nur die Wegweiser-Funktion ausgenutzt
  - innere Knoten führen nur (K_i, P_i) als Einträge
  - Information (K_i, D_i) wird in den Blattknoten abgelegt. Dabei werden alle Schlüssel mit ihren zugehörigen Daten in Sortierreihenfolge in den Blättern abgelegt werden.
  - Für einige K_i ergibt sich eine redundante Speicherung. Die inneren Knoten bilden also einen Index, der einen schnellen direkten Zugriff zu den Schlüsseln gestattet.
  - Der Verzweigungsgrad erhöht sich beträchtlich, was wiederum die Höhe des Baumes reduziert
  - Durch Verkettung aller Blattknoten läßt sich eine effiziente sequentielle Verarbeitung erreichen, die beim B-Baum einen umständlichen Durchlauf in symmetrischer Ordnung erforderte

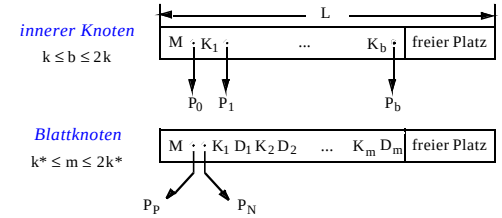
  ⇒ B*-Baum ist die für den praktischen Einsatz wichtigste Variante des B-Baums

B*-Baum der Klasse t (3,2,3)



B*-Bäume (2)

- **Def.:** Seien k, k* und h* ganze Zahlen, h* ≥ 0, k, k* > 0.
  Ein B*-Baum B der Klasse τ (k, k*, h*) ist entweder ein leerer Baum oder ein geordneter Baum, für den gilt:
  1. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt besitzt die gleiche Länge h*-1.
  2. Jeder Knoten außer der Wurzel und den Blättern hat mindestens k+1 Söhne, die Wurzel mindestens 2 Söhne, außer wenn sie ein Blatt ist.
  3. Jeder innere Knoten hat höchstens 2k+1 Söhne.
  4. Jeder Blattknoten mit Ausnahme der Wurzel als Blatt hat mindestens k* und höchstens 2k* Einträge.
- Unterscheidung von zwei Knotenformaten:



Feld M enthalte Kennung des Seitentyps sowie Zahl der aktuellen Einträge

B*-Bäume(3)

- Da die Seiten eine feste Länge L besitzen, läßt sich aufgrund der obigen Formate k und k* bestimmen:

$$L = l_M + l_P + 2 \cdot k\,(l_K + l_P)\;; \qquad k = \left\lfloor \frac{L - l_M - l_P}{2 \cdot (l_K + l_P)} \right\rfloor$$

$$L = l_M + 2 \cdot l_P + 2 \cdot k^*(l_K + l_D)\;; \; k^* = \left\lfloor \frac{L - l_M - 2l_P}{2 \cdot (l_K + l_D)} \right\rfloor$$

- Höhe des B*-Baumes

$$1 + \log_{2k+1}\left(\frac{n}{2k^*}\right) \le h^* \le 2 + \log_{k+1}\left(\frac{n}{2k^*}\right) \quad \text{für} \quad h^* \ge 2 \;.$$

B- und B*-Bäume

- Quantitativer Vergleich
  - Seitengröße sei L= 2048 B. Zeiger P_i, Hilfsinformation und Schlüssel K_i seien 4 B lang. Fallunterscheidung:
  - eingebettete Speicherung: l_D = 76 Bytes
  - separate Speicherung: l_D = 4 Bytes, d.h., es wird nur ein Zeiger gespeichert.
- Allgemeine Zusammenhänge:

	B-Baum	B*-Baum
n_{min}	$2 \cdot (k+1)^{h-1} - 1$	$2k^* \cdot (k+1)^{h^*-2}$
n_{max}	$(2k+1)^h - 1$	$2k^* \cdot (2k+1)^{h^*-1}$

- Vergleich für Beispielwerte:

B-Baum

	Datensätze separat (k=85)		Datensätze eingebettet (k=12)	
h	n_{min}	n_{max}	n_{min}	n_{max}
1	1	170	1	24
2	171	29.240	25	624
3	14.791	5.000.210	337	15.624
4	1.272.112	855.036.083	4.393	390.624

B*-Baum

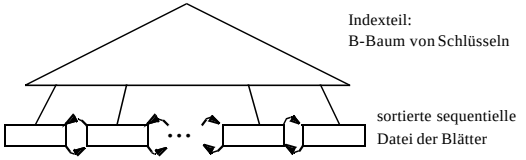
	Datensätze separat (k=127, k* = 127)		Datensätze eingebettet (k=12, k* = 127)	
h	n_{min}	n_{max}	n_{min}	n_{max}
1	1	254	1	24
2	254	64.770	24	6.120
3	32.512	16.516.350	3.072	1.560.600
4	4.161.536	4.211.669.268	393.216	397.953.001

Historie und Terminologie

- Originalpublikation B-Baum:
  - R. Bayer, E. M. McCreight. Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes. Acta Informatica, 1:4. 1972. 290-306.
- Überblick:
  - D. Comer: The Ubiquitous B-Tree. ACM Computing Surveys, 11:2, Juni 1979, pp. 121-137.
- B*-Baum Originalpublikation:
  D. E. Knuth: The Art of Programming, Vol. 3, Addison-Wesley, 1973.
- Terminologie:
  - Bei Knuth: B*-Baum ist ein B-Baum mit garantierter 2 / 3-Auslastung der Knoten
  - B+-Baum ist ein Baum wie hier dargestellt
  - Heutige Literatur: B*-Baum = B+-Baum.

B*-Bäume: Operationen

- B*-Baum entspricht einer geketteten sequentiellen Datei von Blättern, die einen Indexteil besitzt, der selbst ein B-Baum ist. Im Indexteil werden insbesondere beim Split-Vorgang die Operationen des B-Baums eingesetzt.



- Grundoperationen beim B*-Baum

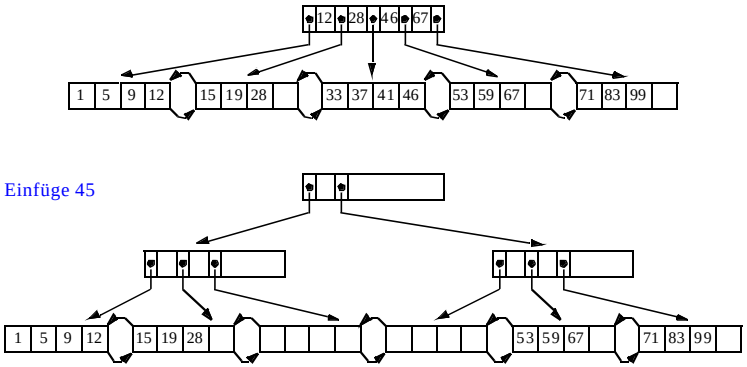
(1) Direkte Suche: Da alle Schlüssel in den Blättern, kostet jede direkte Suche h* Zugriffe. h* ist jedoch im Mittel kleiner als h in B-Bäumen (günstigeres f_{avg} als beim B-Baum)

(2) Sequentielle Suche: Sie erfolgt nach Aufsuchen des Linksaußen der Struktur unter Ausnutzung der Verkettung der Blattseiten. Es sind zwar ggf. mehr Blätter als beim B-Baum zu verarbeiten, doch da nur h*-1 innere Knoten aufzusuchen sind, wird die sequentielle Suche ebenfalls effizienter ablaufen.

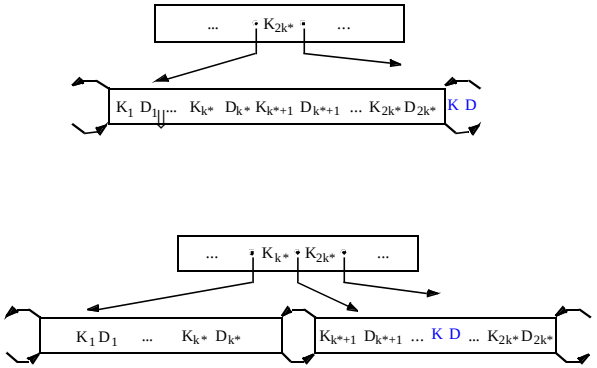
(3) Einfügen: Von Durchführung und Leistungsverhalten dem Einfügen in einen B-Baum sehr ähnlich. Bei inneren Knoten wird die Spaltung analog zum B-Baum durchgeführt. Beim Split-Vorgang einer Blattseite muß gewährleistet sein, daß jeweils die höchsten Schlüssel einer Seite als Wegweiser in den Vaterknoten kopiert werden.

(4) Löschen: Datenelemente werden immer von einem Blatt entfernt (keine komplexe Fallunterscheidung wie beim B-Baum). Weiterhin muß beim Löschen eines Schlüssels aus einem Blatt dieser Schlüssel nicht aus dem Indexteil entfernt werden; er behält seine Funktion als Wegweiser.

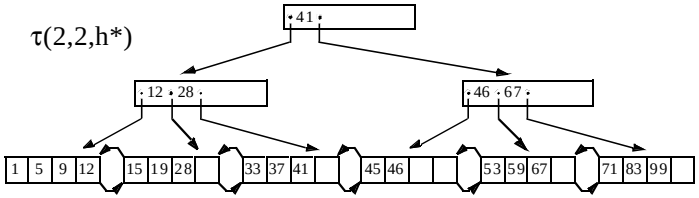
Einfügen im B*-Baum



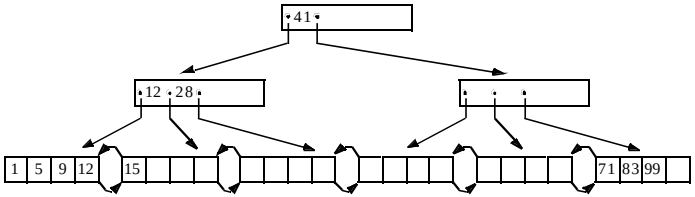
B*-Bäume: Schema für Split-Vorgang



Löschen im B*-Baum: Beispiel

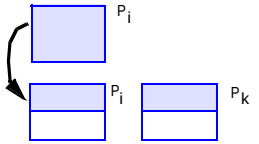


Lösche 28, 41, 46

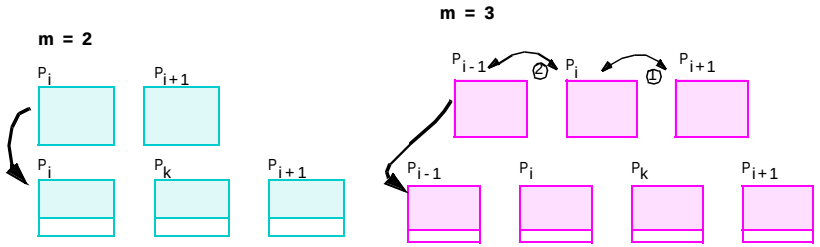


Verallgemeinerte Überlaufbehandlung

Standard (m=1): Überlauf führt zu zwei halb vollen Seiten



m > 1: Verbesserung der Belegung



Verallgemeinerte Überlaufbehandlung (2)

- **Speicherplatzbelegung** als Funktion des Split-Faktors

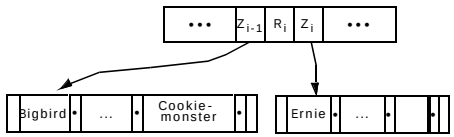
Split-Faktor	β_{min}	Belegung β_{avg}	β_{max}
1	1/2 = 50%	ln 2 ≈ 69%	1
2	2/3 = 66%	2 · ln (3/2) ≈ 81%	1
3	3/4 = 75%	3 · ln (4/3) ≈ 86%	1
m	$\frac{m}{m+1}$	$m \cdot \ln\left(\frac{m+1}{m}\right)$	1

- Vorteile der höheren Speicherbelegung
  - geringere Anzahl von Seiten reduziert Speicherbedarf
  - geringere Baumhöhe
  - geringerer Aufwand für direkte Suche
  - geringerer Aufwand für sequentielle Suche
- erhöhter Split-Aufwand (m > 3 i.a. zu teuer)

Schlüsselkomprimierung

- Zeichenkomprimierung ermöglicht weit höhere Anzahl von Einträgen pro Seite (v.a. bei B*-Baum)
  - Verbesserung der Baumbreite (höherer Fan-Out)
  - wirkungsvoll v.a. für lange, alphanumerische Schlüssel (z.B. Namen)
- Präfix-Komprimierung
  - mit Vorgängerschlüssel übereinstimmender Schlüsselanfang (Präfix) wird nicht wiederholt
  - v.a. wirkungsvoll für Blattseiten
  - höherer Aufwand zur Schlüsselrekonstruktion
- Suffix-Komprimierung
  - für innere Knoten ist vollständige Wiederholung von Schlüsselwerten meist nicht erforderlich, um Wegweiserfunktion zu erhalten
  - Weglassen des zur eindeutigen Lokalisierung nicht benötigten Schlüsselendes (Suffix)
  - *Präfix-B-Bäume*: Verwendung minimale Separatoren (Präfixe) in inneren Knoten

Schlüssel	F	kompr. Schlüssel
HARALD		
HARTMUT		
HEIN		
HEINRICH		
HEINZ		
HELMUT		
HOLGER		



Schlüsselkomprimierung (2)

- für Zwischenknoten kann Präfix- und Suffix-Komprimierung kombiniert werden: *Präfix-Suffix-Komprimierung* (Front and Rear Compression)
  - gespeichert werden nur solche Zeichen eines Schlüssels, die sich vom Vorgänger und Nachfolger unterscheiden
  - u.a. in VSAM eingesetzt
- *Verfahrensparameter*:

  V = Position im Schlüssel, in der sich der zu komprimierende Schlüssel vom *Vorgänger* unterscheidet

  N = Position im Schlüssel, in der sich der zu komprimierende Schlüssel vom *Nachfolger* unterscheidet

  F = V - 1 (Anzahl der Zeichen des komprimierten Schlüssels, die mit dem Vorgänger übereinstimmen)

  L = MAX (N-F, 0) Länge des komprimierten Schlüssels

Schlüssel	V	N	F	L	kompr. Schlüssel
HARALD					
HARTMUT					
HEIN					
HEINRICH					
HEINZ					
HELMUT					
HOLGER					

- Durschschnittl. komprimierte Schlüssellänge ca. 1.3 - 1.8

Präfix-Suffix-Komprimierung: weiteres Anwendungsbeispiel

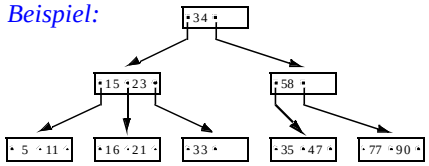
Schlüssel (unkomprimiert)		*V*	*N*	*F*	*L*	*Wert*
CITY_OF_NEW_ORLEANS	... GUTHERIE, ARLO	1	6	0	6	CITY_O
CITY_TO_CITY	... RAFFERTTY, GERRY	6	2	5	0	
CLOSET_CHRONICLES	... KANSAS	2	2	1	1	L
COCAINE	... CALE, J.J	2	3	1	2	OC
COLD_AS_ICE	... FOREIGNER	3	6	2	4	LD_A
COLD_WIND_TO_WALHALLA	... JETHRO_TULL	6	4	5	0	
COLORADO	... STILLS, STEPHEN	4	5	3	2	OR
COLOURS	... DONOVAN	5	3	4	0	
COME_INSIDE	... COMMODORES	3	13	2	11	ME_INSIDE__
COME_INSIDE_OF_MY_GUITAR	... BELLAMY_BROTHERS	13	6	12	0	
COME_ON_OVER	... BEE_GEES	6	6	5	1	O
COME_TOGETHER	... BEATLES	6	4	5	0	
COMING_INTO_LOS_ANGELES	... GUTHERIE, ARLO	4	4	3	1	I
COMMOTION	... CCR	4	4	3	1	M
COMPARED_TO_WHAT?	... FLACK, ROBERTA	4	3	3	0	
CONCLUSION	... ELP	3	4	2	2	NC
CONFUSION	... PROCOL_HARUM	4	1	3	0	

2-3-Bäume

- B-Bäume können auch als Hauptspeicher-Datenstruktur verwendet werden
  - möglichst kleine Knoten wichtiger als hohes Fan-Out
  - 2-3 Bäume: B-Bäume der Klasse $\tau(1,h)$, d.h. mit minimalen Knoten

  ⇒ Es gelten alle für den B-Baum entwickelten Such- und Modifikationsalgorithmen
- Ein 2-3-Baum ist ein m-Wege-Suchbaum (m=3), der entweder leer ist oder die Höhe $h \geq 1$ hat und folgende Eigenschaften besitzt:
  - Alle Knoten haben einen oder zwei Einträge (Schlüssel).
  - Alle Knoten außer den Blattknoten besitzen 2 oder 3 Söhne.
  - Alle Blattknoten sind auf derselben Stufe.

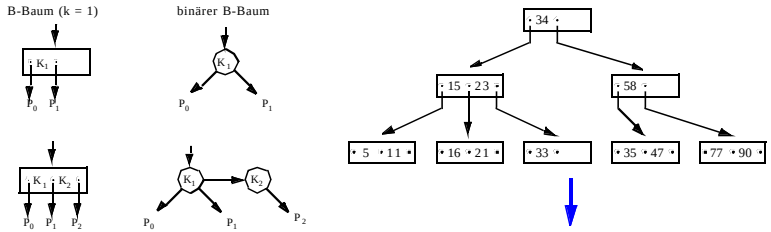
Beispiel:



- Beobachtungen
  - 2-3-Baum ist balancierter Baum
  - ähnliche Laufzeitkomplexität wie AVL-Baum
  - schlechte Speicherplatznutzung (besonders nach Höhenänderung)

Binäre B-Bäume

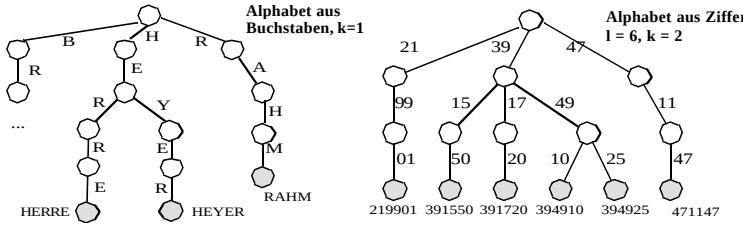
- Verbesserte Speicherplatznutzung gegenüber 2-3-Bäumen durch Speicherung der Knoten als gekettete Listen mit einem oder zwei Elementen:



- Variante: symmetrischer binärer B-Baum

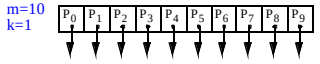
Digitale Suchbäume

- Prinzip des digitaler Suchbäume (kurz: Digitalbäume)
  - Zerlegung des Schlüssels - bestehend aus Zeichen eines Alphabets - in Teile
  - Aufbau des Baumes nach Schlüsselteilen
  - Suche im Baum durch Vergleich von Schlüsselteilen
  - jede unterschiedliche Folge von Teilschlüsseln ergibt eigenen Suchweg im Baum
  - alle Schlüssel mit dem gleichen Präfix haben in der Länge des Präfixes den gleichen Suchweg
  - vorteilhaft u.a. bei variabel langen Schlüsseln, z.B. Strings
- Was sind Schlüsselteile ?
  - Schlüsselteile können gebildet werden durch Elemente (Bits, Ziffern, Zeichen) eines Alphabets oder durch Zusammenfassungen dieser Grundelemente (z. B. Silben der Länge k)
  - Höhe des Baumes = l/k + 1, wenn l die max. Schlüssellänge und k die Schlüsselteillänge ist



m-ärer Trie

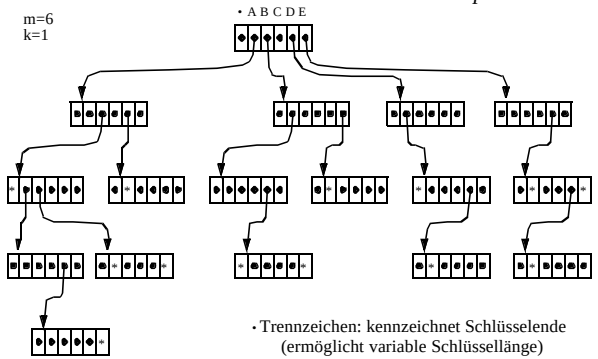
- Spezielle Implementierung des Digitalbaumes: Trie
  - Trie leitet sich von Information Retrieval ab (E.Fredkin, 1960)
- spezielle m-Wege-Bäume, wobei Kardinalität des Alphabets und Länge k der Schlüsselteile den Grad m festlegen
  - bei Ziffern: m = 10
  - bei Alpha-Zeichen: m = 26; bei alphanumerischen Zeichen: m = 36
  - bei Schlüsselteilen der Länge k potenziert sich Grad entsprechend, d. h. als Grad ergibt sich m^k
- Trie-Darstellung
  - Jeder Knoten eines Tries vom Grad m ist im Prinzip ein eindimensionaler Vektor mit m Zeigern
  - Jedes Element im Vektor ist einem Zeichen (bzw. Zeichenkombination) zugeordnet. Auf diese Weise wird ein Schlüsselteil (Kante) implizit durch die Vektorposition ausgedrückt.
  - Beispiel: Knoten eines 10-ären Trie mit Ziffern als Schlüsselteilen



  - implizite Zuordnung von Ziffer/Zeichen zu Zeiger. P_i gehört also zur Ziffer i. Tritt Ziffer i in der betreffenden Position auf, so verweist P_i auf den Nachfolgerknoten. Kommt i in der betreffenden Position nicht vor, so ist P_i mit NULL belegt
  - Wenn der Knoten auf der j-ten Stufe eines 10-ären Trie liegt, dann zeigt P_i auf einen Unterbaum, der nur Schlüssel enthält, die in der j-ten Position die Ziffer i besitzen

- Grundoperationen
  - Direkte Suche: In der Wurzel wird nach dem 1. Zeichen des Suchschlüssels verglichen. Bei Gleichheit wird der zugehörige Zeiger verfolgt. Im gefundenen Knoten wird nach dem 2. Zeichen verglichen usw.
    - Aufwand bei erfolgreicher Suche: l_i/k (+ 1 bei Präfix)
    - effiziente Bestimmung der Abwesenheit eines Schlüssels (z. B. CAD)
  - Einfügen: Wenn Suchpfad schon vorhanden, wird NULL-Zeiger in *-Zeiger umgewandelt, sonst Einfügen von neuen Knoten (z. B. CAD)
  - Löschen: Nach Aufsuchen des richtigen Knotens wird ein *-Zeiger auf NULL gesetzt. Besitzt daraufhin der Knoten nur NULL-Zeiger, wird er aus dem Baum entfernt (rekursive Überprüfung der Vorgängerknoten
  - Sequentielle Suche ?

Beispiel: Trie für Schlüssel aus einem auf A-E beschränkten Alphabet



• Trennzeichen: kennzeichnet Schlüsselende (ermöglicht variable Schlüssellänge)

* = Verweis auf Datensatz

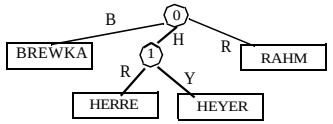
m-ärer Trie (3)

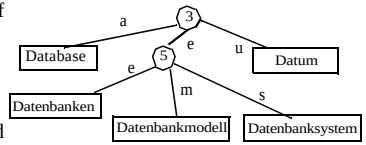
- Beobachtungen:
  - Höhe des Trie wird durch den längsten abgespeicherten Schlüssel bestimmt
  - Gestalt des Baumes hängt von der Schlüsselmenge, also von der Verteilung der Schlüssel, nicht aber von der Reihenfolge ihrer Abspeicherung ab
  - Knoten, die nur NULL-Zeiger besitzen, werden nicht angelegt
- dennoch schlechte Speicherplatzausnutzung
  - dünn besetzte Knoten
  - viele Einweg-Verzweigungen (v.a. in der Nähe der Blätter)
- Möglichkeiten der Kompression
  - Sobald ein Zeiger auf einen Unterbaum mit nur einem Schlüssel verweist, wird der (Rest-) Schlüssel in einem speziellen Knotenformat aufgenommen und Unterbaum eingespart
    -> vermeidet Einweg-Verzweigungen
  - nur besetzte Verweise werden gespeichert (erfordert Angabe des zugehörigen Schlüsselteils)

PATRICIA-Baum

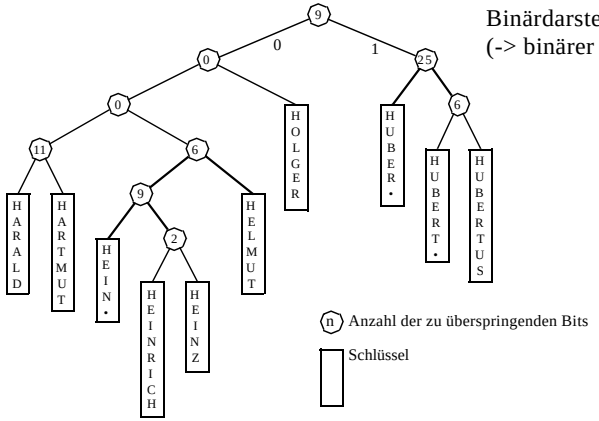
(Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric)

- Merkmale
  - Binärdarstellung für Schlüsselwerte -> binärer Digitalbaum
  - Speicherung der Schlüssel in den Blättern
  - **innere Knoten** speichern, wieviele Zeichen (Bits) beim Test zur Wegeauswahl zu überspringen sind
  - Vermeidung von Einwegverzweigungen, in dem bei nur noch einem verbleibenden Schlüssel direkt auf entsprechendes Blatt verwiesen wird
- Bewertung
  - speichereffizient
  - sehr gut geeignet für variabel lange Schlüssel und (sehr lange) Binärdarstellungen von Schlüsselwerten
  - bei jedem Suchschlüssel muß die Testfolge von der Wurzel beginnend ganz ausgeführt werden, bevor über Erfolg oder Mißerfolg der Suche entschieden werden kann





PATRICIA-Baum (2)



Binärdarstellung
(-> binärer Digitalbaum)

HANS = 1001000...
HEINZ = 1001000...
HOLGER= 1001000...
Bert = 1000010...
...
OTTO = 1001111...
...

n Anzahl der zu überspringenden Bits

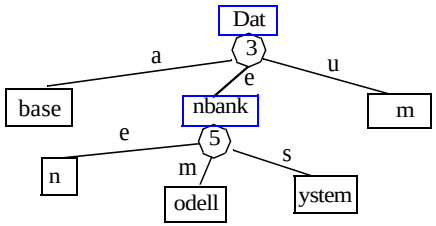
Schlüssel

- Suche nach dem Schlüssel HEINZ = X'10010001000101100100110011101011010' ?
- Suche nach ABEL = X'10000011000010100010111001100' ?

⇒ erfolgreiche und erfolglose Suche endet in einem Blattknoten

Präfix- bzw. Radix-Baum

- (Binärer) Digitalbaum als Variante des PATRICIA-Baumes
  - Speicherung variabel langer Schlüsselteile in den inneren Knoten, sobald sie sich als Präfixe für die Schlüssel des zugehörigen Unterbaums abspalten lassen
  - komplexere Knotenformate und aufwendigere Such- und Aktualisierungsoperationen
  - erfolglose Suche läßt sich oft schon in einem inneren Knoten abbrechen



i Anzahl übereinstimmender Positionen

gemeinsames Schlüsselelement

Restschlüssel (Blatt)

Zusammenfassung

- Konzept des Mehrwegbaumes:
  - Aufbau sehr breiter Bäume von geringer Höhe
  - Bezugsgröße: Seite als Transporteinheit zum Externspeicher
  - Seiten werden immer größer, d. h., das Fan-out wächst weiter
- B- und B*-Baum gewährleisten eine balancierte Struktur
  - unabhängig von Schlüsselmenge
  - unabhängig ihrer Einfügereihenfolge
- Wichtigste Unterschiede des B*-Baums zum B-Baum:
  - strikte Trennung zwischen Datenteil und Indexteil. Datenelemente stehen nur in den Blättern des B*-Baumes
  - Schlüssel innerer Knoten haben nur Wegweiserfunktion. Sie können auch durch beliebige Trenner ersetzt oder durch Komprimierungsalgorithmen verkürzt werden
  - kürzere Schlüssel oder Trenner in den inneren Knoten erhöhen Verzweigungsgrad des Baumes und verringern damit seine Höhe
  - die redundant gespeicherten Schlüssel erhöhen den Speicherplatzbedarf nur geringfügig (< 1%)
  - Löschalgorithmus ist einfacher
  - Verkettung der Blattseiten ergibt schnellere sequentielle Verarbeitung

Zusammenfassung (2)

- Standard-Zugriffspfadstruktur in DBS: B*-Baum
- verallgemeinerte Überlaufbehandlung verbessert Seitenbelegung
- Schlüsselkomprimierung
  - Verbesserung der Baumbreite
  - Präfix-Suffix-Komprimierung sehr effektiv
  - Schlüssellängen von 20-40 Bytes werden im Mittel auf 1.3-1.8 Bytes reduziert
- Binäre B-Bäume: Alternative zu AVL-Bäumen als Hauptspeicher-Datenstruktur
- Digitale Suchbäume: Verwendung von Schlüsselteilen
  - Unterstützung von Suchvorgängen u.a. bei langen Schlüsseln variabler Länge
  - wesentliche Realisierungen: PATRICIA-Baum / Radix-Baum