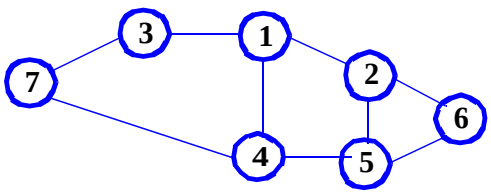
# 3. Graphen

- Definitionen
- Implementierungsalternativen
  - Kantenliste, Knotenliste
  - Adjazenzmatrix, Adjazenzliste
  - Vergleich
- Traversierung von Graphen
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Topologisches Sortieren
- Transitive Hülle (Warshall-Algorithmus)
- Kürzeste Wege (Dijkstra-Algorithmus etc.)
- Minimale Spannbäume (Kruskal-Algorithmus)
- Maximale Flüsse (Ford-Fulkerson)
- Maximales Matching

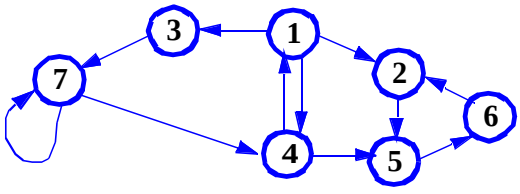


# Einführung

- Graphen sind zur Repräsentation von Problemen vielseitig verwendbar, z.B.
  - Städte: Verbindungswege
  - Personen: Relationen zwischen ihnen
  - Rechner: Verbindungen
  - Aktionen: zeitliche Abhängigkeiten
- Graph: Menge von Knoten (Vertices) und Kanten (Edges)
  - ungerichtete Graphen
  - gerichtete Graphen (Digraph, Directed graph)
  - gerichtete, azyklische Graphen (DAG, Directed Acyclic Graph)




**ungerichteter Graph $G_u$**




**gerichteter Graph $G_g$**

# Definitionen

- G = (V, E) heißt **ungerichteter Graph** : ⇔
  - $V \neq \emptyset$ ist eine endliche, nichtleere Menge. V heißt Knotenmenge, Elemente von V heißen *Knoten*
  - E ist eine Menge von ein- oder zweielementigen Teilmengen von V. E heißt Kantenmenge, ein Paar $\{u,v\} \in E$ heißt *Kante*
  - Eine Kante {u} heißt *Schlinge*
  - Zwei Knoten u und v heißen *benachbart* (adjazent): ⇔ $\{u,v\} \in E$ oder $(u=v) \wedge \{u\} \in E$.
- Sei G = (V,E) ein ungerichteter Graph. Wenn E keine Schlinge enthält, so heißt G *schlingenlos.*

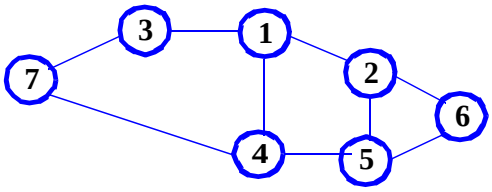
*Bem.* Im weiteren werden wir Kanten {u,v} als Paare (u,v) oder (v,u) und Schlingen {u} als Paar (u,u) schreiben, um spätere gemeinsame Definitionen für ungerichtete und gerichtete Graphen nicht differenzieren und notationell unterscheiden zu müssen.

- Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ ungerichtete Graphen.
  - H heißt *Teilgraph* von G ($H \subset G$): ⇔ $V_G \supset V_H$ und $E_G \supset E_H$
  - H heißt vollständiger Teilgraph von G : ⇔
    $H \subset G$ und $[(u,v) \in E_G$ mit $u,v \in V_H \Rightarrow (u,v) \in E_H]$.



# Beispiele ungerichteter Graphen

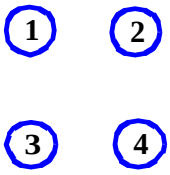
- Beispiel 1
  - $G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{1, 2, 3, 4\}$,
  - $E_G = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
- Beispiel 2



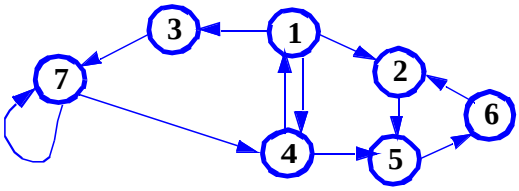

**ungerichteter Graph $G_u$**

# Definitionen (2)

- G = (V,E) heißt gerichteter Graph (Directed Graph, Digraph) : $\Leftrightarrow$
  - $V \neq \emptyset$ ist endliche Menge. V heißt Knotenmenge, Elemente von V heißen Knoten.
  - $E \subseteq V \times V$ heißt Kantenmenge, Elemente von E heißen Kanten.
    Schreibweise: (u, v) oder $u \rightarrow v$. u ist die Quelle, v das Ziel der Kante $u \rightarrow v$.
  - Eine Kante (u, u) heißt Schlinge.
- Beispiel
  - $G = (V_G, E_G)$ mit $V_G = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E_G = \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4\}$




- Beispiel 2



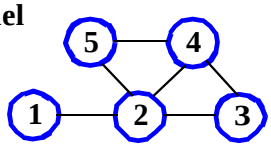

**gerichteter Graph $G_g$**



# Definitionen (3)

- Sei G = (V,E) ein (un)gerichteter Graph und $k = (v_0, ..., v_n) \in V^{n+1}$.
  - k heißt *Kantenfolge* der Länge n von $v_0$ nach $v_n$, wenn für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Im gerichteten Fall ist $v_0$ der Startknoten und $v_n$ der Endknoten, im ungerichteten Fall sind $v_0$ und $v_n$ die Endknoten von k.
    $v_1, ..., v_{n-1}$ sind die *inneren Knoten* von k. Ist $v_0 = v_n$, so ist die Kantenfolge *geschlossen*.
  - k heißt *Kantenzug* der Länge n von $v_0$ nach $v_n$, wenn k Kantenfolge der Länge n von $v_0$ nach $v_n$ ist und wenn für alle $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ mit $i \neq j$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$.
  - k heißt *Weg* (Pfad) der Länge n von $v_0$ nach $v_n$, wenn k Kantenfolge der Länge n von $v_0$ nach $v_n$ ist und wenn für alle $i, j \in \{0, ..., n\}$ mit $i \neq j$ gilt: $v_i \neq v_j$.
  - k heißt *Zyklus* oder Kreis der Länge n, wenn k geschlossene Kantenfolge der Länge n von $v_0$ nach $v_n$ und wenn $k' = (v_0, ..., v_{n-1})$ ein Weg ist. Ein Graph ohne Zyklus heißt kreisfrei oder *azyklisch*. Ein gerichteter azyklischer Graph heißt auch *DAG (Directed Acyclic Graph)*
  - Graph ist *zusammenhängend*, wenn zwischen je 2 Knoten ein Kantenzug existiert

**Beispiel**

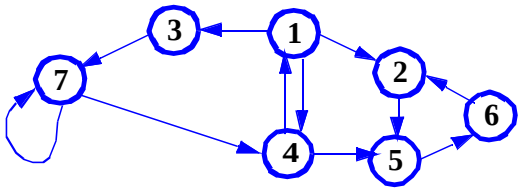



Kantenfolge:
Kantenzug:
Weg:
Zyklus:

- Sei G = (V, E) (un)gerichteter Graph, k Kantenfolge von v nach w. Dann gibt es einen Weg von v nach w.

# Definitionen (4)

- Sei G = (V, E) ein gerichteter Graph
  - *Eingangsgrad:* eg (v) = |{v' | (v', v) ∈ E}|
  - *Ausgangsgrad:* ag(v) = |{v' | (v, v') ∈ E}|
  - G heißt *gerichteter Wald*, wenn G zyklenfrei ist und für alle Knoten v gilt eg(v) <= 1. Jeder Knoten v mit eg(v)=0 ist eine *Wurzel* des Waldes.
  - *Aufspannender Wald* (Spannwald) von G: gerichteter Wald W=(V,F) mit F ⊆ E
- *Gerichteter Baum (Wurzelbaum)*: gerichteter Wald mit genau 1 Wurzel
  - für jeden Knoten v eines gerichteten Baums gibt es genau einen Weg von der Wurzel zu v
  - *Erzeugender / aufspannender Baum (Spannbaum)* eines Digraphen G: Spannwald von G mit nur 1 Wurzel
- zu jedem zusammenhängenden Graphen gibt es (mind.) einen Spannbaum




**gerichteter Graph $G_g$**



# Definitionen (5)

- Markierte Graphen

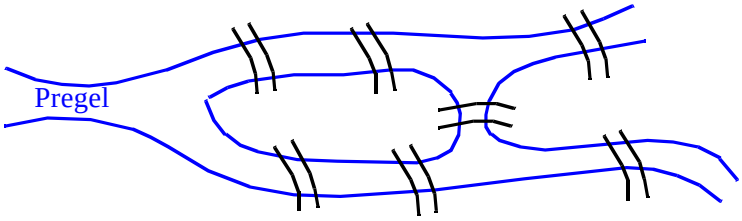
  Sei G = (V, E) ein (un)gerichteter Graph, $M_V$ und $M_E$ Mengen und $\mu : V \rightarrow M_V$ und $g : E \rightarrow M_E$ Abbildungen.
  - G' = (V, E, μ) heißt *knotenmarkierter Graph*
  - G'' = (V, E, g) heißt *kantenmarkierter Graph*
  - G''' = (V, E, μ, g) heißt *knoten- und kantenmarkierter Graph*

  $M_V$ und $M_E$ sind die Markierungsmengen (z.B. Alphabete oder Zahlen)

# Algorithmische Probleme für Graphen

Gegeben sei ein (un)gerichteter Graph G = (V, E)

- Man entscheide, ob G zusammenhängend ist
- Man entscheide, ob G azyklisch ist
- Man finde zu zwei Knoten, v, w $\in$ V einen *kürzesten Weg* von v nach w (bzw. „günstigster“ Weg bzgl. Kantenmarkierung)
- Man entscheide, ob G einen *Hamiltonschen Zyklus* besitzt, d.h. einen Zyklus der Länge $|V|$
- Man entscheide, ob G einen *Eulerschen Weg* besitzt, d.h. einen Weg, in dem jede Kante genau einmal verwendet wird, und dessen Anfangs- und Endpunkte gleich sind (*Königsberger Brückenproblem*)





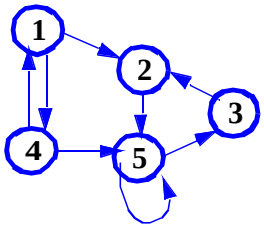

# Algorithmische Probleme (2)

- *Färbungsproblem:* Man entscheide zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl k („Anzahl der Farben“), ob es eine Knotenmarkierung $\mu : V \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ so gibt, daß für alle (v, w) $\in$ E gilt: $\mu(v) \neq \mu(w)$ [G azyklisch]
- *Cliquenproblem:* Man entscheide für ungerichteten Graphen G zu vorgegebener natürlichen Zahl k, ob es einen Teilgraphen G' („k-Clique“) von G gibt, dessen Knoten alle paarweise durch Kanten verbunden sind
- *Matching-Problem:* Sei G = (V, E) ein Graph. Eine Teilmenge M $\subseteq$ E der Kanten heißt Matching, wenn jeder Knoten von V zu höchstens einer Kante aus M gehört. Problem: finde ein maximales Matching
- *Traveling Salesman Problem*: Bestimme optimale Rundreise durch n Städte, bei der jede Stadt nur einmal besucht wird und minimale Kosten entstehen

Hierunter sind bekannte NP-vollständige Probleme, z.B. das Cliquenproblem, das Färbungsproblem, die Hamilton-Eigenschaftsprüfung und das Traveling Salesman Problem

# Speicherung von Graphen

- Knoten- und Kantenlisten
  - Speicherung von Graphen als Liste von Zahlen (z.B. in Array oder verketteter Liste)
  - Knoten werden von 1 bis n durchnumeriert; Kanten als Paare von Knoten
- Kantenliste
  - Liste: Knotenzahl, Kantenzahl, Liste von Kanten (je als 2 Zahlen)
  - Speicherbedarf: 2 + 2m (m = Anzahl Kanten)
- Knotenliste
  - Liste: Knotenzahl, Kantenzahl, Liste von Knoteninformationen
  - Knoteninformation: Ausgangsgrad und Zielknoten $ag(i)$, $v_1$ .. $v_{ag(i)}$
  - Speicherbedarf: 2 + n+m (n= Anzahl Knoten, m = Anzahl Kanten)
- Beispiel




Kantenliste:

Knotenliste:

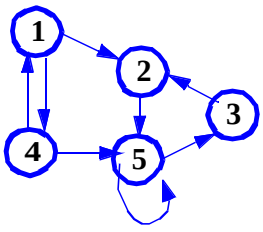


# Speicherung von Graphen (2)

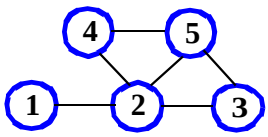
- Adjazenzmatrix

  Ein Graph G = (V,E) mit $|V|$ = n wird in einer Boole'schen n x n -Matrix

  $A_G = (a_{ij})$, mit $1 \le i,j \le n$ gespeichert, wobei $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{falls } (i,j) \in E \end{cases}$
- Beispiel:



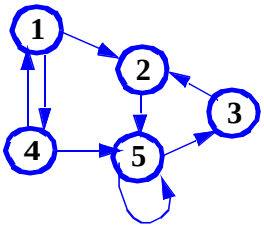

| $A_G$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

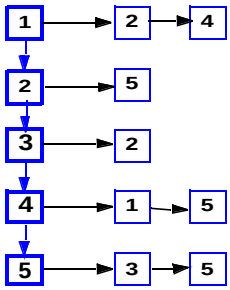



- Speicherplatzbedarf $O(n^2)$
  - jedoch nur 1 Bit pro Position (statt Knoten/Kantennummern)
  - unabhängig von Kantenmenge
  - für ungerichtete Graphen ergibt sich symmetrische Belegung (Halbierung des Speicherbedarfs möglich)

# Speicherung von Graphen (3)

- Adjazenzlisten
  - verkettete Liste der n Knoten (oder Array-Realisierung)
  - pro Knoten: verkettete Liste der Nachfolger (repräsentiert die von dem Knoten ausgehenden Kanten)
  - Speicherbedarf: n+m Listenelemente




- Variante: doppelt verkettete Kantenlisten (doubly connected arc list, DCAL)



# Speicherung von Graphen (4)

```
/** Repräsentiert einen Knoten im Graphen. */
public class Vertex {
  Object key = null;        // Knotenbezeichner
  LinkedList edges = null;  // Liste ausgehender Kanten

  /** Konstruktor */
  public Vertex(Object key) { this.key = key; edges = new LinkedList(); }

  /** Ueberschreibe Object.equals-Methode */
  public boolean equals(Object obj) {
    if (obj == null) return false;
    if (obj instanceof Vertex) return key.equals(((Vertex) obj).key);
    else return key.equals(obj); }

  /** Ueberschreibe Object.hashCode-Methode */
  public int hashCode() { return key.hashCode(); } ... }

/** Repraesentiert eine Kante im Graphen. */
public class Edge {
  Vertex dest = null;  // Kantenzielknoten
  int weight = 0;      // Kantengewicht

  /** Konstruktor */
  public Edge(Vertex dest, int weight) {
    this.dest = dest;  this.weight=weight; } ... }
```

```
/** Graphrepräsentation. */
public class Graph {

  protected Hashtable vertices = null;  // enthaelt alle Knoten des Graphen

  /** Konstruktor */
  public Graph() { vertices = new Hashtable(); }

  /** Fuegt einen Knoten in den Graphen ein. */
  public void addVertex(Object key) {
    if (vertices.containsKey(key))
      throw new GraphException("Knoten exisitert bereits!");
    vertices.put(key, new Vertex(key)); }

  /** Fuegt eine Kante in den Graphen ein. */
  public void addEdge(Object src, Object dest, int weight) {
    Vertex vsrc = (Vertex) vertices.get(src);
    Vertex vdest = (Vertex) vertices.get(dest);
    if (vsrc == null)
      throw new GraphException("Ausgangsknoten existiert nicht!");
    if (vdest == null)
      throw new GraphException("Zielknoten existiert nicht!");
    vsrc.edges.add(new Edge(vdest, weight)); }

  /** Liefert einen Iterator ueber alle Knoten. */
  public Iterator getVertices() { return vertices.values().iterator(); }

  /** Liefert den zum Knotenbezeichner gehoerigen Knoten. */
  public Vertex getVertex(Object key) {
    return (Vertex) vertices.get(key); } }
```



# Speicherung von Graphen: Vergleich

- Komplexitätsvergleich

| Operation | Kantenliste | Knotenliste | Adjazenzmatrix | Adjazenzliste |
|---|---|---|---|---|
| Einfügen Kante | O(1) | O(n+m) | O(1) | O (1) / O (n) |
| Löschen Kante | O(m) | O(n+m) | O(1) | O(n) |
| Einfügen Knoten | O(1) | O(1) | $O(n^2)$ | O(1) |
| Löschen Knoten | O(m) | O(n+m) | $O(n^2)$ | O(n+m) |
| Speicherplatzbedarf | O(m) | O(n+m) | $O(n^2)$ | O(n+m) |

  - Löschen eines Knotens löscht auch zugehörige Kanten
  - Änderungsaufwand abhängig von Realisierung der Adjazenzmatrix und Adjazenzliste

- Welche Repräsentation geeigneter ist, hängt auch vom Problem ab:
  - *Frage:* Gibt es Kante von a nach b: *Matrix*
  - Durchsuchen von Knoten in durch Nachbarschaft gegebener Reihenfolge: *Listen*

- Transformation zwischen Implementierungsalternativen möglich

# Traversierung

- Traversierung: Durchlaufen eines Graphen, bei dem jeder Knoten (bzw. jede Kante) genau 1-mal aufgesucht wird
  - Beispiel 1: Aufsuchen aller Verbindungen (Kanten) und Kreuzungen (Knoten) in einem Labyrinth
  - Beispiel 2: Aufsuchen aller Web-Server durch Suchmaschinen-Roboter
- Generische Lösungsmöglichkeit für Graphen G=(V, E)

```
for each Knoten v ∈ V do { markiere v als unbearbeitet};
B = {s}; // Initialisierung der Menge besuchter Knoten B mit Startknoten s ∈ V;
markiere s als bearbeitet;
while es gibt noch unbearbeitete Knoten v' mit (v,v') ∈ E und v ∈ B do {
        B = B ∪ {v'};
        markiere v' als bearbeitet;
        };
}
```

- Realisierungen unterscheiden sich bezüglich Verwaltung der noch abzuarbeitenden Knotenmenge und Auswahl der jeweils nächsten Kante



# Traversierung (2)

- Breitendurchlauf (Breadth First Search, BFS)
  - ausgehend von Startknoten werden zunächst alle direkt erreichbaren Knoten bearbeitet
  - danach die über mindestens zwei Kanten vom Startknoten erreichbaren Knoten, dann die über drei Kanten usw.
  - es werden also erst die Nachbarn besucht, bevor zu den Söhnen gegangen wird
  - kann mit FIFO-Datenstruktur für noch zu bearbeitende Knoten realisiert werden
- Tiefendurchlauf (Depth First Search, DFS)
  - ausgehend von Startknoten werden zunächst rekursiv alle Söhne (Nachfolger) bearbeitet; erst dann wird zu den Nachbarn gegangen
  - kann mit Stack-Datenstruktur für noch zu bearbeitende Knoten realisiert werden
  - Verallgemeinerung der Traversierung von Bäumen
- Algorithmen nutzen „Farbwert“ pro Knoten zur Kennzeichnung des Bearbeitungszustandes
  - weiß: noch nicht bearbeitet
  - schwarz: abgearbeitet
  - grau: in Bearbeitung

# Breitensuche

- Bearbeite einen Knoten, der in *n Schritten* von *u* erreichbar ist, erst, wenn alle Knoten, die in n-1 Schritten erreichbar sind, abgearbeitet wurden.
  - ungerichteter Graph G = (V,E); Startknoten s; Q sei FIFO-Warteschlange.
  - zu jedem Knoten u wird der aktuelle Farbwert, der Abstand d zu Startknoten s, und der Vorgänger pred, von dem aus u erreicht wurde, gespeichert
  - Funktion succ(u) liefert die Menge der direkten Nachfolger von u
  - pred-Werte liefern nach Abarbeitung für zusammenhängende Graphen einen *aufspannenden Baum (Spannbaum)*, ansonsten *Spannwald*

**BFS(G,s):**

**for each** Knoten v ∈ V - s **do** { farbe[v]= weiß; d[v] = ∞; pred [v] = null };
farbe[s] = grau; d[s] = 0; pred [s] = null; Q = emptyQueue; Q = enqueue(Q,s);
**while not** isEmpty(Q) **do** { v = front(Q);
    **for each** u ∈ succ (v) **do** {
        **if** farbe(u) = weiß **then**
        { farbe[u] = grau; d[u] = d[v]+1; pred[u] = v; Q = enqueue(Q,u); };
    };
    dequeue(Q); farbe[v] = schwarz;
}

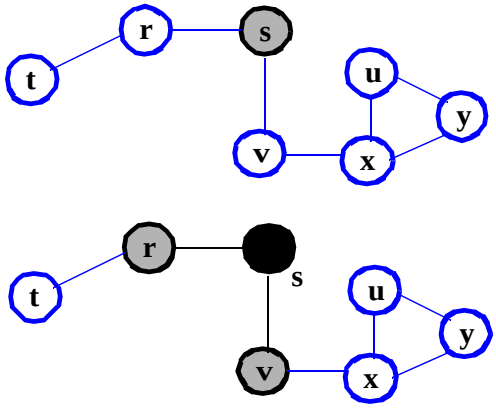


# Breitensuche (2)

```
/** Liefert die Liste aller erreichbaren Knoten in Breitendurchlauf. */
  public List traverseBFS(Object root, Hashtable d, Hashtable pred) {
    LinkedList list = new LinkedList();
    Hashtable color = new Hashtable();
    Integer gray = new Integer(1);
    Integer black = new Integer(2);
    Queue q = new Queue();
    Vertex v, u = null;
    Iterator eIter = null;
    v = (Vertex)vertices.get(root);
    color.put(v, gray);
    d.put(v, new Integer(0));
    q.enqueue(v);
    while (! q.empty()) {
      v = (Vertex) vertices.get(((Vertex)q.front()).key);
      eIter = v.edges.iterator();
      while(eIter.hasNext()) {
        u = ((Edge)eIter.next()).dest;
        if (color.get(u) == null) {
          color.put(u, gray);
          d.put(u, new Integer(((Integer)d.get(v)).intValue() + 1));
          pred.put(u, v);
          q.enqueue(u);
        }
      }
      q.dequeue();
      list.add(v);
      color.put(v, black);
    }
    return list;
  }
```

# Breitensuche (3)

- Beispiel:







- *Komplexität:* ein Besuch pro Kante und Knoten: O(n + m)
  - falls G zusammenhängend gilt |E| > |V| -1 -> Komplexität O(m)
- Breitensuche unterstützt Lösung von Distanzproblemen, z.B. Berechnung der Länge des *kürzesten Wegs* eines Knoten s zu anderen Knoten



# Tiefensuche

- Bearbeite einen Knoten v erst dann, wenn alle seine Söhne bearbeitet sind (außer wenn ein Sohn auf dem Weg zu v liegt)
  - (un)gerichteter Graph G = (V,E); succ(v) liefert Menge der direkten Nachfolger von Knoten v
  - zu jedem Knoten v wird der aktuelle Farbwert, die Zeitpunkte *in* bzw. *out*, zu denen der Knoten im Rahmen der Tiefensuche erreicht bzw. verlassen wurden, sowie der Vorgänger *pred*, von dem aus v erreicht wurde, gespeichert
  - die in- bzw. out-Zeitpunkte ergeben eine Reihenfolge der Knoten analog zur Vor- bzw. Nachordnung bei Bäumen

**DFS(G):**

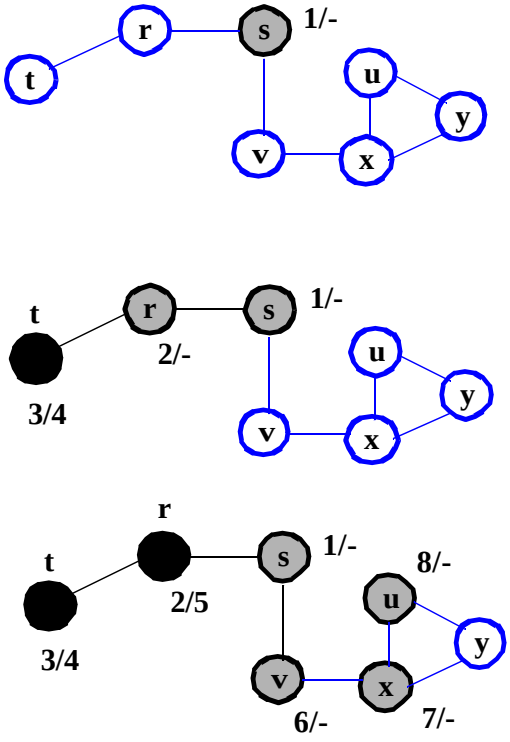
**for each** Knoten v ∈ V **do** { farbe[v]= weiß; pred [v] = null };
zeit = 0; **for each** Knoten v ∈ V **do** { **if** farbe[v]= weiß **then** DFS-visit(v) };

**DFS-visit (v):** **// rekursive Methode zur Tiefensuche**

farbe[v]= grau; zeit = zeit+1; in[v]=zeit;
**for each** u ∈ succ (v) **do** { **if** farbe(u) = weiß **then** { pred[u] = v; DFS-visit(u); }; };
farbe[v] = schwarz; zeit = zeit+1; out[v]=zeit;

- *lineare Komplexität* O(n+m)
  - DFS-visit wird genau einmal pro (weißem) Knoten aufgerufen
  - pro Knoten erfolgt Schleifendurchlauf für jede von diesem Knoten ausgehende Kante

# Tiefensuche: Beispiel



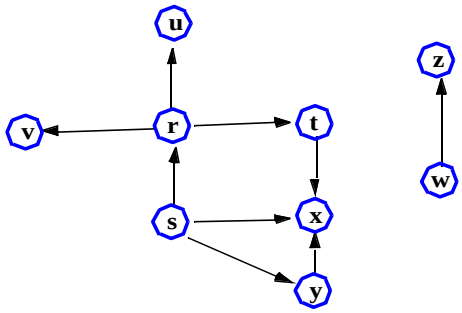



# Topologische Sortierung

- gerichtete Kanten eines zyklenfreien Digraphs (DAG) beschreiben Halbordnung unter Knoten
- topologische Sortierung erzeugt vollständige Ordnung, die nicht im Widerspruch zur partiellen Ordnung steht
  - d.h. falls eine Kante von Knoten i nach j existiert, erscheint i in der linearen Ordnung vor j
- Topologische Sortierung eines Digraphen G = (V,E):

  Abbildung *ord: V ® {1, ..., n}* mit $|V| = n$,

  so daß mit $(u,v) \in E$ auch ord(u) < ord(v) gilt.
- Beispiel:



# Topologische Sortierung (2)

- Satz: Digraph G = (V,E) ist zyklenfrei <=> für G existiert eine topologische Sortierung

  **Beweis:** <= klar

  => Induktion über |V|.

  *Induktionsanfang:* |V| = 1, keine Kante, bereits topologisch sortiert

  *Induktionsschluß:* |V| = n.

  - Da *G azyklisch* ist, muß es einen Knoten v ohne Vorgänger geben. Setze ord(v) = 1
  - Durch Entfernen von v erhalten wir einen azyklischen Graphen G' mit |V'| = n-1, für den es nach Induktionsvoraussetzung *topologische Sortierung ord'* gibt
  - Die gesuchte topologische Sortierung für G ergibt sich durch ord(v') = ord'(v') + 1, für alle v' ∈ V'

- Korollar: zu jedem DAG gibt es eine topologische Sortierung



# Topologische Sortierung (3)

- Beweis liefert einen Algorithmus zur topologischen Sortierung

  Bestimmung einer Abbildung ord für gerichteten Graphen G = (V,E) zur topologischen Sortierung und Test auf Zyklenfreiheit

  **TS (G):**

  **i=0;**

  **while** G hat wenigstens einen Knoten v mit eg (v) = 0 **do** {

  i = i+1; ord(v) := i; G = G - {v}; };

  **if** G = {} **then** „G ist zyklenfrei“ **else** „G hat Zyklen“;

  - (Neu-)Bestimmung des Eingangsgrades kann sehr aufwendig werden
  - Effizienter ist daher, den jeweils aktuellen Eingangsgrad zu jedem Knoten zu speichern

- effiziente Alternative: Verwendung der Tiefensuche
  - Verwendung der out-Zeitpunkte, in umgekehrter Reihenfolge
  - Realisierung mit Aufwand O(n+m)
  - Mit denselben Kosten O(n+m) kann die Zyklenfreiheit eines Graphen getestet werden (Zyklus liegt dann vor, wenn bei der Tiefensuche der Nachfolger eines Knotens bereits *grau* gefärbt ist!)

# Topologische Sortierung (4)

- Anwendungsbeispiel

  zerstreuter Professor legt die Reihenfolge beim Ankleiden fest

  - Unterhose vor Hose
  - Hose vor Gürtel
  - Hemd vor Gürtel
  - Gürtel vor Jackett
  - Hemd vor Krawatte
  - Krawatte vor Jackett
  - Socken vor Schuhen
  - Unterhose vor Schuhen
  - Hose vor Schuhen
  - Uhr: egal

- Ergebnis der topologischen Sortierung mit Tiefensuche abhängig von Wahl der Startknoten (weissen Knoten)

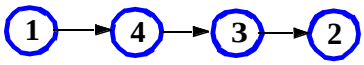


# Transitive Hülle

- Erreichbarkeit von Knoten
  - welche Knoten sind von einem gegebenen Knoten aus erreichbar?
  - gibt es Knoten, von denen aus alle anderen erreicht werden können?
  - Bestimmung der transitiven Hülle ermöglicht Beantwortung solcher Fragen

- Ein Digraph G* = (V,E*) ist die *reflexive, transitive Hülle* (kurz: Hülle) eines Digraphen G = (V,E), wenn genau dann (v,v') ∈ E* ist, wenn es einen Weg von v nach v' in G gibt.

**Beispiel**




| A | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |

- Algorithmus zur Berechnung von Pfeilen der reflexiven transitiven Hülle

```
boolean [ ] [ ] A = { ...}; for (int i = 0; i < A.length; i++) A [i] [i] = true;
for (int i = 0; i < A.length; i++)
        for (int j = 0; j < A.length; j++)
                if A[i][j] for (int k = 0; k < A.length; k++) if A [j][k] A [i][k] = true;
```

  - es werden nur Pfade der Länge 2 bestimmt!
  - Komplexität $O(n^3)$

# Transitive Hülle: Warshall-Algorithmus

- Einfache Modifikation liefert vollständige transitive Hülle

```
boolean [ ] [ ] A = { ...}; for (int i = 0; i < A.length; i++) A [i] [i] = true;
for (int j = 0; j < A.length; j++)
        for (int i = 0; i < A.length; i++)
                if A[i][j] for (int k = 0; k < A.length; k++) if A [j][k] A [i][k] = true;
```

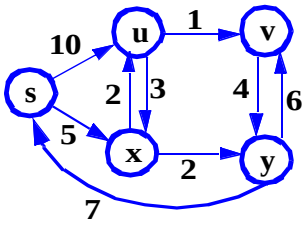
- Korrektheit kann über Indusktionsbeweis gezeigt werden
  - *Induktionshypothese P(j):* gibt es zu beliebigen Knoten i und k einen Weg von i nach k, so dass alle Zwischenknoten aus der Menge {0, 1, ...j} sind, so wird in der j-ten Iteration A [i][k]=true gesetzt.
    Wenn P(j) für alle j gilt, wird keine Kante der transitiven Hülle vergessen
  - *Induktionsanfang*: j=0: Falls A[i][0] und A[0][k] gilt, wird in der Schleife mit j=0 auch A[i][k] gesetzt
  - *Induktionsschluß*: Sei P(j) wahr für 0 .. j. Sei ein Weg von i nach k vorhanden, der Knoten j+1 nutzt, dann gibt es auch einen solchen, auf dem j+1 nur einmal vorkommt. Aufgrund der Induktionshypothese wurde in einer früheren Iteration der äußeren Schleife bereits (i,j+1) und (j+1,k) eingefügt. In der (j+1)-ten Iteration wird nun (i,k) gefunden. Somit gilt auch P(j+1).

- Komplexität
  - innerste for-Schleife wird nicht notwendigerweise $n^2$-mal (n=|V|) durchlaufen, sondern nur falls Verbindung von i nach j in E* vorkommt, also O(k) mit k=|E*| mal
  - Gesamtkomplexität $O(n^2+k \cdot n)$.



# Kürzeste Wege

- *kantenmarkierter (gewichteter) Graph* G = (V, E, g)
  - Weg/Pfad P der Länge n: $(v_0,v_1), (v_1,v_2), \ldots ,(v_{n-1}, v_n)$
  - *Gewicht* (Länge) des Weges/Pfads
    $$w(P) = \Sigma\, g((v_i, v_{i+1}))$$
  - *Distanz* d (u,v): Gewicht des kürzesten Pfades von u nach v




- Varianten
  - nichtnegative Gewichte vs. negative und positive Gewichte
  - Bestimmung der kürzesten Wege
    a) zwischen allen Knotenpaaren,
    b) von einem Knoten u aus
    c) zwischen zwei Knoten u und v
- Bemerkungen
  - kürzeste Wege sind nicht immer eindeutig
  - kürzeste Wege müssen nicht existieren:
    es existiert kein Weg;
    es existiert Zyklus mit negativem Gewicht

# Kürzeste Wege (2)

- Warshall-Algorithmus läßt sich einfach modifizieren, um kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren zu berechnen
  - Matrix A enthält zunächst Knotengewichte pro Kante, ∞ falls "keine Kante" vorliegt
  - A[i,i] wird mit 0 vorbelegt
  - Annahme: kein Zyklus mit negativem Gewicht vorhanden

```
int [ ] [ ] A = { ...}; for (int i = 0; i < A.length; i++) A [i] [i] = 0;
for (int j = 0; j < A.length; j++)
        for (int i = 0; i < A.length; i++)
                for (int k = 0; k < A.length; k++)
                        if (A [i][j] + A [j][k] < A [i][k])
                                A [i][k]= A [i][j] + A [j][k];
```

- Komplexität $O(n^3)$



# Kürzeste Wege: *Dijkstra-Algorithmus*

- Bestimmung der von einem Knoten ausgehenden kürzesten Wege
  - *gegeben:* kanten-bewerteter Graph G = (V,E, g) mit g: E -> $R^+$ (Kantengewichte)
  - Startknoten s; zu jedem Knoten u wird die Distanz zu Startknoten s in D[u] geführt
  - Q sei Prioritäts-Warteschlange (sortierte Liste); Priorität = Distanzwert
  - Funktion succ(u) liefert die Menge der direkten Nachfolger von u

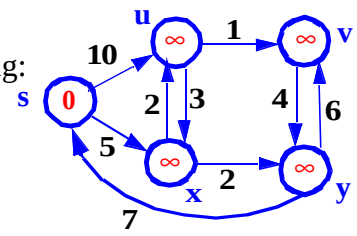
**Dijkstra (G,s):**

```
for each Knoten v ∈ V - s do { D[v] = ∞;};
D[s] = 0; PriorityQueue Q = V;
while not isEmpty(Q) do { v = extractMinimum(Q);
        for each u ∈ succ (v) ∩ Q do {
                if D[v] + g ((v,u)) < D[u] then
                        { D[u] = D[v] + g ((v,u));
                         adjustiere Q an neuen Wert D[u]; };
        };
}
```

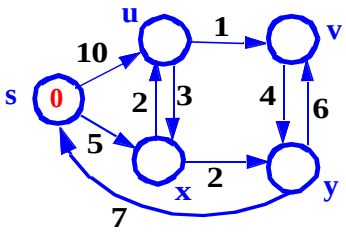
- Verallgemeinerung der Breitensuche (gewichtete Entfernung)
- funktioniert nur bei nicht-negativen Gewichten
- Optimierung gemäß Greedy-Prinzip

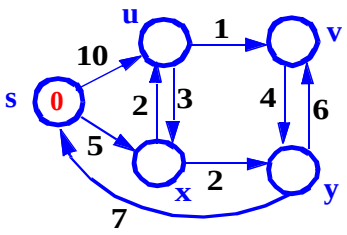
# Dijkstra-Algorithmus: Beispiel

Initialisierung:




Q = < (s:0), (u: ∞), (v: ∞), (x: ∞), (y: ∞)>







# Dijkstra-Algorithmus (3)

- Korrektheitsbeweis
  - nach i Schleifendurchgängen sind die Längen von i Knoten, die am nächsten an s liegen, korrekt berechnet und diese Knoten sind aus Q entfernt.
  - *Induktionsanfang:* s wird gewählt, D (s) = 0
  - *Induktionsschritt:* Nimm an, v wird aus Q genommen. Der kürzeste Pfad zu v gehe über direkten Vorgänger v' von v. Da v' näher an s liegt, ist v' nach Induktionsvoraussetzung mit richtiger Länge D(v') bereits entfernt. Da der *kürzeste Weg* zu v die Länge D(v') + g((v',v)) hat und dieser Wert bei Entfernen von v' bereits v zugewiesen wurde, wird v mit der richtigen Länge entfernt.
  - erfordert nichtnegative Kantengewichte (steigende Länge durch hinzugenommene Kanten)
- Komplexität <= $O(n^2)$
  - n-maliges Durchlaufen der *äußeren Schleife* liefert Faktor O(n)
  - innere Schleife: Auffinden des Minimums begrenzt durch O(n), ebenso das Aufsuchen der Nachbarn von v
- Pfade bilden aufspannenden Baum (der die Wegstrecken von s aus gesehen minimiert)
- Bestimmung des kürzesten Weges zwischen u und v: Spezialfall für Dijkstra-Algorithmus mit Start-Knoten u (Beendigung sobald v aus Q entfernt wird)

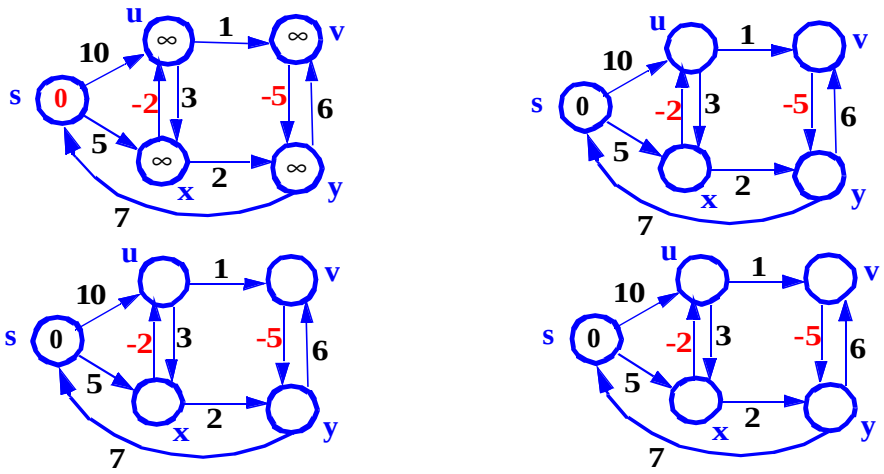


# Kürzeste Wege mit negativen Kantengewichten

- Bellmann-Ford-Algorithmus **BF (G,s):**

```
for each Knoten v ∈ V - s do { D[v] = ∞;}; D[s] = 0;
for i = 1 to |E|-1 do
        for each (u,v) ∈ E do {
                if D[u] + g ((u,v)) < D[v] then D[v] = D[u] + g ((u,v));
        };
```

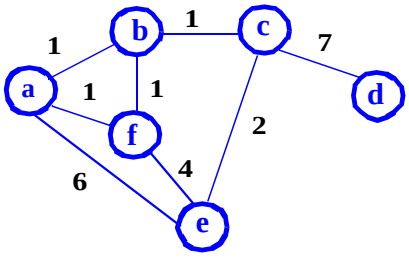
Beispiel:






# Minimale Spannbäume

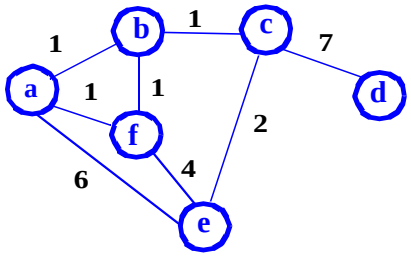
- Problemstellung: zu zusammenhängendem Graph soll Spannbaum (aufspannender Baum) mit minimalem Kantengewicht (minimale Gesamtlänge) bestimmt werden
  - relevant z.B. zur Reduzierung von Leitungskosten in Versorgungsnetzen
  - zusätzliche Knoten können zur Reduzierung der Gesamtlänge eines Graphen führen
- Kruskal-Algorithmus (1956)
  - Sei G = (V, E, g) mit g: E -> R (Kantengewichte) gegebener ungerichteter, zusammenhängender Graph. Zu bestimmen minimaler Spannbaum T = (V, E')
  - E' = {}; sortiere E nach Kantengewicht und bringe die Kanten in PriorityQueue Q; jeder Knoten v bilde eigenen Spannbaum(-Kandidat)
  - solange Q nicht leer:
    - entferne erstes Element e = (u,v)
    - wenn beide Endknoten u und v im selben Spannbaum sind, verwerfe e, ansonsten nehme e in E' auf und fasse die Spannbäume von u und v zusammen




- Analog: Bestimmung maximaler Spannbäume (absteigende Sortierung)

# Minimale Spannbäume (2)

- Anwendung des Kruskal-Algorithmus

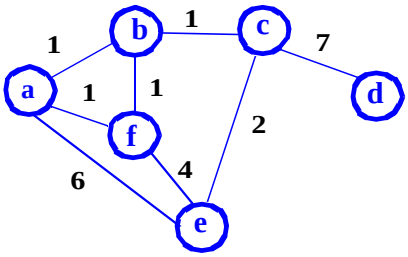



- Komplexität O (m log n)



# Minimale Spannbäume (3)

- Alternative Berechnung (Dijkstra)
  - Startknoten s
  - Knotenmenge B enthält bereits abgearbeitete Knoten

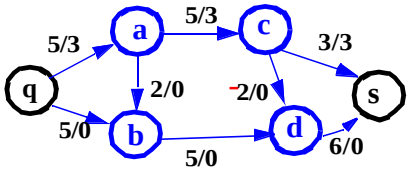



**s = an Kante mit minimalem Gewicht beteiligter Knoten**
**B={ s }; E' = { };**
**while |B| < |V| do {**
wähle (u,v) ∈ E mit minimalem Gewicht mit u ∈ B, v ∉ B;
füge (u,v) zu E' hinzu;
füge v zu B hinzu; }

- es wird nur 1 Spannbaum erzeugt
- effiziente Implementierbarkeit mit PriorityQueue über Kantengewicht

# Flüsse in Netzen

- Anwendungsprobleme:
  - Wieviele Autos können durch ein Straßennetz fahren?
  - Wieviel Abwasser fasst ein Kanalnetz?
  - Wieviel Strom kann durch ein Leitungsnetz fließen?




**Kantenmarkierung:**
**Kapazität c(e) / Fluß f(e)**

- *Def.:* Ein (Fluß-) *Netzwerk* ist ein gerichteter Graph G = (V, E, c) mit ausgezeichneten Knoten *q (Quelle)* und *s (Senke),* sowie einer *Kapazitätsfunktion* c: E -> $Z^+$.

- Ein *Fluß* für das Netzwerk ist eine Funktion f: E -> $Z^+$, so daß gilt:
  - *Kapazitätsbeschränkung*: **f(e) £ c(e), für alle e in E.**
  - *Flußerhaltung:* für alle v in V \ {q,s}: $S_{(v',v) \hat{I} E}$ **f((v',v))** = $S_{(v,v') \hat{I} E}$ **f((v,v'))**
  - Der *Wert* von f, w(f), ist die Summe der Flußwerte der die Quelle q verlassenden Kanten: $S_{(q,v) \hat{I} E}$ f((q,v))

- Gesucht: Fluß mit maximalem Wert
  - begrenzt durch Summe der aus q wegführenden bzw. in s eingehenden Kapazitäten
  - jeder weitere „Schnitt“ durch den Graphen, der q und s trennt, begrenzt max. Fluss



# Flüsse in Netzen (2)

- *Schnitt (A, B)* eines Fluß-Netzwerks ist eine Zerlegung von V in disjunkte Teilmengen A und B, so daß q ∈ A und s ∈ B.
  - Die Kapazität des Schnitts ist **c(A,B)** = $S_{u \hat{I} A, v \hat{I} B}$ **c((u,v))**
  - *minimaler Schnitt* (minimal cut): Schnitt mit kleinster Kapazität

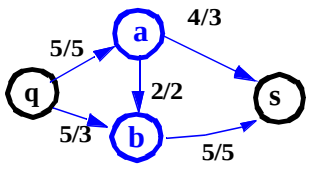
- Restkapazität, Restgraph

  Sei f ein zulässiger Fluß für G = (V,E). Sei E' = {(v,w) | (v,w) ∈ E oder (w,v) ∈ E}

  - Wir definieren die *Restkapazität einer Kante* e = (v,w) wie folgt:

    rest(e) = c(e) - f(e) falls e ∈ E
    f((w,v)) falls (w,v) ∈ E
  - Der *Restgraph* von f (bzgl. G) besteht aus den Kanten e ∈ E', für die rest(e) > 0

- Jeder gerichtete Pfad von q nach s im Restgraphen heißt *zunehmender Weg*

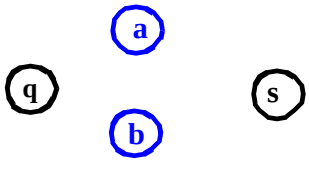



**Kantenmarkierung: Kapazität c(e) / Fluß f(e)**

**verwendetete Wege:**
1.) q, a, b, s (Kapaz. 2)
2.) q, b, s (3)
3.) q, a, s (3)

w (f) = 8, nicht maximal

Restgraph:




**Kantenmarkierung: rest (e)**

# Flüsse in Netzen (3)

■ Theorem (Min-Cut-Max-Flow-Theorem):

Sei f zulässiger Fluß für G. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) f ist maximaler Fluß in G.

2) Der Restgraph von f enthält keinen zunehmenden Weg.

3) w(f) = c(A,B) für einen Schnitt (A,B) von G.

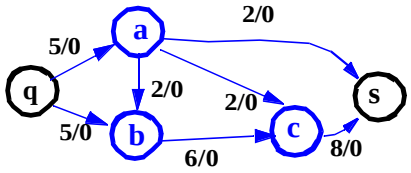
■ *Ford-Fulkerson-Algorithmus*

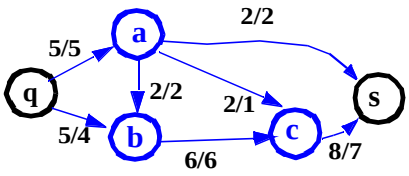
- füge solange zunehmende Wege zum Gesamtfluß hinzu wie möglich
- Kapazität erhöht sich jeweils um Minimum der verfügbaren Restkapazität der einzelnen Kanten des zunehmenden Weges

```
for each e ∈ E { f(e) = 0;}
while ( es gibt zunehmenden Weg p im Restgraphen von f ) {
        r = min{rest(e) | e liegt in p};
      for each e = (v,w) auf Pfad p {
            if (e in E)     f(e)= f(e) + r ;
            else            f((w,v)) = f((w,v)) - r; } }
```



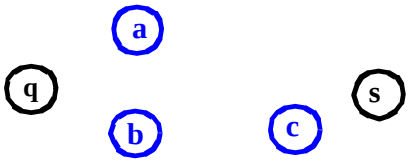
# Ford-Fulkerson: Anwendungsbeispiel

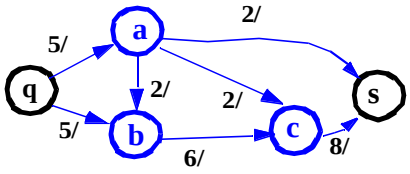



**Kantenmarkierung:**
**Kapazität c(e) / Fluß f(e)**

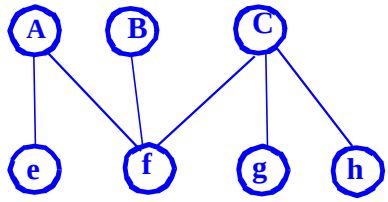
**Restgraph:**



# Maximales Matching

- *Beispiel:*
  - Eine Gruppe von Erwachsenen und eine Gruppe von Kindern besuchen Disneyland.
  - Auf der Achterbahn darf ein Kind jeweils nur in Begleitung eines Erwachsenen fahren.
  - Nur Erwachsene/Kinder, die sich kennen, sollen zusammen fahren. Wieviele Kinder können maximal eine Fahrt mitmachen?

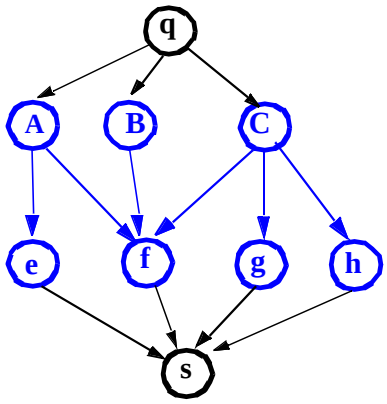



- *Matching (Zuordnung) M* für ungerichteten Graphen G = (V, E) ist eine Teilmenge der Kanten, so daß jeder Knoten in V in höchstens einer Kante vorkommt
  - |M| = Größe der Zuordnung
  - *Perfektes Matching:* kein Knoten bleibt „allein“ (unmatched), d.h. jeder Knoten ist in einer Kante von M vertreten
- Matching M ist maximal, wenn es kein Matching M' gibt mit |M| < |M'|
- Verallgemeinerung mit gewichteten Kanten: Matching mit maximalem Gewicht



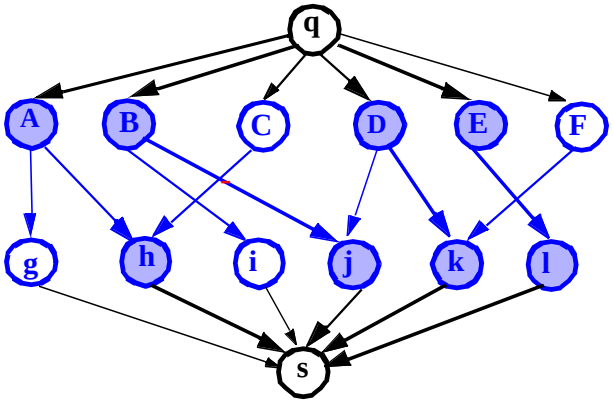
# Matching (2)

- *Def.:* Ein *bipartiter Graph* ist ein Graph, dessen Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V1 und V2 aufgeteilt ist, und dessen Kanten jeweils einen Knoten aus V1 mit einem aus V2 verbinden
- Maximales Matching kann auf maximalen Fluß zurückgeführt werden:
  - Quelle und Senke hinzufügen.
  - Kanten von V1 nach V2 richten.
  - Jeder Knoten in V1 erhält eingehende Kante von der Quelle.
  - Jeder Knoten in V2 erhält ausgehende Kante zur Senke.
  - Alle Kanten erhalten Kapazität c(e) = 1.
- Jetzt kann Ford-Fulkerson-Algorithmus angewendet werden



# Matching (3)

- Weiteres Anwendungsbeispiel




- ist gezeigtes Matching maximal?



# Zusammenfassung

- viele wichtige Informatikprobleme lassen sich mit gerichteten bzw. ungerichteten Graphen behandeln
- wesentliche Implementierungsalternativen: Adjazenzmatrix und Adjazenzlisten
- Algorithmen mit linearem Aufwand:
  - Traversierung von Graphen: Breitensuche vs. Tiefensuche
  - Topologisches Sortieren
  - Test auf Azyklität
- Weitere wichtige Algorithmen†:
  - Warshall-Algorithmus zur Bestimmung der transitiven Hülle
  - Dijkstra-Algorithmus bzw. Bellmann-Ford für kürzeste Wege
  - Kruskal-Algorithmus für minimale Spannbäume
  - Ford-Fulkerson-Algorithmus für maximale Flüsse bzw. maximales Matching
- viele NP-vollständige Optimierungsprobleme
  - Traveling Salesman Problem, Cliquenproblem, Färbungsproblem ...
  - Bestimmung eines planaren Graphen (Graph-Darstellung ohne überschneidende Kanten)

† Animationen u.a. unter *http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/main/index.shtml*