2. Einfache Suchverfahren

Lineare Listen

Sequentielle Suche

Binäre Suche

Weitere Suchverfahren auf sortierten Feldern

- Fibonacci-Suche
- Sprungsuche
- Exponentielle Suche
- Interpolationssuche

Auswahlproblem

Lineare Listen

Lineare Liste

- endliche Folge von Elementen eines Grundtyps (Elementtyps)
  $<a_1, a_2, \ldots a_n>$ $\quad n >= 0$
  n=0: leere Liste < >
- Position von Elementen in der Liste ist wesentlich

Typische Operationen

- INIT (L): Initialisiert L, d.h. L wird eine leere Liste
- INSERT (L, x, p): Fügt x an Position p in Liste L ein und verschiebt die Elemente an p und den nachfolgenden Positionen auf die jeweils nächsthöhere Position
- DELETE (L, p): Löscht das Element an Position p der Liste L
- ISEMPTY (L): Ermittelt, ob Liste L leer ist
- SEARCH (L, x) bzw. LOCATE (L, x): Prüft, ob x in L vorkommt bzw. gibt die erste Position von L, in der x vorkommt, zurück
- RETRIEVE (L, p): Liefert das Element an Position p der Liste L zurück
- FIRST (L): Liefert die erste Position der Liste zurück
- NEXT (p, L) und PREVIOUS (p, L): Liefert Element der Liste, das Position p nachfolgt bzw. vorausgeht, zurück
- PRINTLIST (L): Schreibt die Elemente der Liste L in der Reihenfolge ihres Auftretens aus
- CONCAT (L1, L2): Hintereinanderfügen von L1 und L2

Lineare Listen (2)

Komplexität der Operationen abhängig von

- gewählter Implementierung sowie
- ob Sortierung der Elemente vorliegt

Wesentliche Implementierungsalternativen

- Sequentielle Speicherung (Reihung, Array)
- Verkettete Speicherung

Sequentielle Speicherung (Reihung, Array)

- statische Datenstruktur (hoher Speicheraufwand)
- wahlfreie Zugriffsmöglichkeit über (berechenbaren) Index
- 1-dimensionale vs. mehrdimensionale Arrays

Verkettete Speicherung

- dynamische Datenstruktur
- sequentielle Navigation
- Varianten: einfache vs. doppelte Verkettung etc.

Beispiel-Spezifikation in Java

Nutzung des Interface-Konzepts (ADT-Umsetzung)

- Interface: Sammlung abstrakter Methoden
- Implementierung erfolgt durch Klassen (instanziierbar)
- Klassen können mehrere Interfaces implementieren (Simulation der Mehrfachvererbung)
- mehrere Implementierungen pro Interface möglich

```
public interface Liste { // Annahme Schlüssel vom Typ int
   public void insert (int x, int p) throws ListException;
   public void delete (int p) throws ListException;
   public boolean isempty ();
   public boolean search (int x);
   ...
   public Liste concat (Liste L1, Liste L2);
}

public class ListException extends RuntimeException {
       public ListException (String msg) {super (msg); }
       public ListException () { }
}
```

Beispiel (2)

Einsatzbeispiel für Interface Liste

- Implementierung ArrayListe wird vorausgesetzt

```
public class ListExample {
       public static void main (String args[]) {
        Liste list = new ArrayListe ();

       try {
        for ( int i = 1; i <= 20; i++ ) {
                 list.insert (i*i,i);
                 System.out.println (i*i);
                 }
       // ...
        if (! list.search (1000)) list.insert (1000,1);
       }
       catch (ListException exc) {
                 System.out.println (exc);
                 }
       }
}
```


Array-Realisierung linearer Listen

```
public class ArrayListe implements Liste {

    int[] L = null; // Spezialfall: Elemente vom Typ int
    int laenge=0;
    int maxLaenge;

  /* Konstruktoren */

  public ArrayListe(int max) {
       L = new int [max+1]; // Feldindex 0 bleibt reserviert
       maxLaenge = max;
  }
  public ArrayListe() { // Default-Größe 100
       L = new int [101]; // Feldindex 0 bleibt reserviert
       maxLaenge = 100;
  }
```

Array-Realisierung (2)

```
public void insert (int x, int pos) throws ListException {
// Einfügen an Positon pos (Löschen analog)
  if (laenge == maxLaenge) throw new ListException("Liste voll!");
  else if ((pos < 1) || (pos > laenge + 1))
        throw new ListException("Falsche Position!");
  else {
        for (int i=laenge; i >= pos; i--) L[i+1] = L[i];
        L [pos] = x;
        laenge++;
  }
}
// weitere Methoden von ArrayListe
}
```

Einfüge-Komplexität für Liste mit n Elementen:

Sequentielle Suche

Suche nach Element mit Schlüsselwert x

Falls unbekannt, ob die Elemente der Liste nach ihren Schlüsselwerten sortiert sind, ist die Liste sequentiell zu durchlaufen und elementweise zu überprüfen (sequentielle Suche)

```
public boolean search (int x) {
        // Annahme: Methode eingebettet in Klasse ArrayListe
  int pos = 1;
  while ((pos <= laenge) && (L [pos] != x)) pos++;
  return (pos <= laenge);
}
```

Kosten

- erfolglose Suche erfordert n Schleifendurchläufe
- erfolgreiche Suche verlangt im ungünstigsten Fall n Schlüsselvergleiche (und n-1 Schleifendurchläufe)
- mittlere Anzahl von Schlüsselvergleichen bei erfolgreicher Suche:

$$C_{avg}(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$$

Sequentielle Suche (2)

leichte Verbesserung: vereinfachte Schleifenbedingung durch Hinzufügen eines Stoppers bzw. Wächters (englisch “Sentinel”) in Position 0 der Liste

```
public boolean searchSeqStopper(int x) {
  int pos = laenge;
  L[0] = x;
  while (L[pos] != x) pos--;
  return (pos > 0);
}
```


Binäre Suche

auf sortierten Listen können Suchvorgänge effizienter durchgeführt werden

- sequentielle Suche auf sortierten Listen bringt nur geringe Verbesserungen (für erfolglose Suche)
- Binärsuche wesentlich effizienter durch Einsatz der ***Divide-and-Conquer-Strategie***

Suche nach Schlüssel x in Liste mit aufsteigend sortierten Schlüsseln:

- Falls Liste leer ist, endet die Suche erfolglos.
  Sonst: Betrachte Element L [m] an mittlerer Position m
- Falls x = L [m] dann ist das gesuchte Element gefunden.
- Falls x < L [m], dann durchsuche die linke Teilliste von Position 1 bis m-1 nach demselben Verfahren
- Sonst (x > L [m]) durchsuche die rechte Teilliste von Position m+1 bis Laenge nach demselben Verfahren

Beispiel

Liste: 3 8 17 22 30 32 36 42 43 49 53 55 61 66 75

Binäre Suche (2)

Iterative Lösung

```
public boolean binarySearch(int x) {
  int pos;    /* aktuelle Suchposition
                (enthaelt bei erfolgreicher Suche Ergebnis) */
  int ug = 1; // Untergrenze des aktuellen Suchbereichs
  int og = laenge; // Obergrenze des aktuellen Suchbereichs
  boolean gefunden = false;
  while ((ug <= og) && (! gefunden)) {
    pos = (ug + og) / 2;
    if (L[pos] > x)
       og = pos - 1; // linken Bereich durchsuchen
    else if (L[pos] < x)
       ug = pos + 1; // rechten Bereich durchsuchen
    else
      gefunden = true;
  }
  return gefunden;
}
```

Kosten

$C_{min}(n) = 1$ $\quad C_{max}(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ $\quad C_{avg}(n) \approx \log_2(n+1) - 1$, für große n

Suche auf Objekten

bisher Suche nach int-Schlüsseln

Verallgemeinerung auf Schlüssel (Objekte), auf denen Ordnung vorliegt und zwischen denen Vergleiche möglich sind

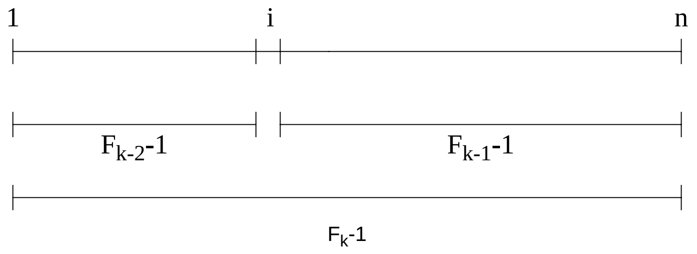
```
public interface Orderable {
    public boolean equals (Orderable o);
    public boolean less (Orderable o);
    public boolean greater (Orderable o);
    public boolean lessEqual (Orderable o);
    public boolean greaterEqual (Orderable o);
    public Orderable minKey ();
}
public class OrderableFloat implements Orderable {
    float key; // Schlüssel vom Typ float
    String wert; // weitere Inhalte
    OrderableFloat (float f) {this.key=f;} // Konstruktor
    public boolean equals (Orderable o) {
        return this.key==((OrderableFloat)o).key;}
    public boolean less (Orderable o) {
        return this.key < ((OrderableFloat)o).key;}
    ...
    public Orderable minKey () {
        return new OrderableFloat(Float.MIN_VALUE);}
}
```

```
public class ArrayListe2 implements Liste2 {
// Liste2 entspricht Liste, jedoch mit Orderable- statt int-Elemeneten
       Orderable[] L = null;
       int laenge=0;
       int maxLaenge;

  public ArrayListe2(int max) {
       L = new Orderable [max+1];
       maxLaenge = max;
  }

public boolean search (Orderable x) {
  int pos = 1;
  while ((pos <= laenge) && (! L [pos].equals (x))) pos++;
  return (pos <= laenge);
}

// weitere Operationen: binarySearch etc. ...
}
```


Fibonacci-Suche

ähnlich der Binärsuche, jedoch wird Suchbereich entsprechend der Folge der Fibonacci-Zahlen geteilt

Teilung einer Liste mit $n = F_k$-1 sortierten Elementen:



Def. Fibonacci-Zahlen:.

$F_0 = 0$,

$F_1 = 1$,

$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ für $k \geq 2$

- Element an der Position $i = F_{k-2}$ wird mit dem Suchschlüssel x verglichen
- Wird Gleichheit festgestellt, endet die Suche erfolgreich.
- Ist x größer, wird der rechte Bereich mit F_{k-1}-1 Elementen, ansonsten der linke Bereich mit F_{k-2}-1 Elementen auf dieselbe Weise durchsucht.

Kosten

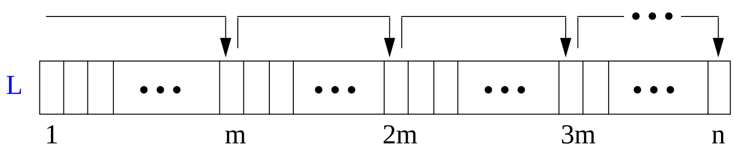
- für n= F_k-1 sind im schlechtesten Fall k-2 Suchschritte notwendig, d.h. O(k) Schlüsselverglei-che

- Da gilt $F_k \approx c \cdot 1{,}618^k$, folgt $C_{max}(n) = O(\log_{1.618}(n+1)) = O(\log n)$.

Sprungsuche

Prinzip

- der sortierte Datenbestand wird zunächst in Sprüngen überquert, um Abschnitt zu lokalisieren, der ggf. den gesuchten Schlüssel enthält



- danach wird der Schlüssel im gefundenen Abschnitt nach irgendeinem Verfahren gesucht

Einfache Sprungsuche

- konstante Sprünge zu Positionen m, 2m, 3m ...
- Sobald `x <= L[i]` mit `i=j•m (j=1,2,...)` wird im Abschnitt `L[(j-1)m+1]` bis `L[j•m]` sequentiell nach dem Suchschlüssel x gesucht.

mittlere Suchkosten

ein Sprung koste a; ein sequentieller Vergleich b Einheiten $C_{avg}(n) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{n}{m} + \frac{1}{2}b(m-1)$

optimale Sprungweite: $m = \sqrt{(a/b)n}$ bzw. $m = \sqrt{n}$

- falls a=b => $C_{avg}(n) = a\sqrt{n} - a/2$

Komplexität $O(\sqrt{n})$

Sprungsuche (2)

Zwei-Ebenen-Sprungsuche

- statt sequentieller Suche im lokalisierten Abschnitt wird wiederum eine Quadratwurzel-Sprungsuche angewendet, bevor dann sequentiell gesucht wird
- Mittlere Kosten: $C_{avg}(n) \le \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{n} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot n^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot n^{\frac{1}{4}}$

  a Kosten eines Sprungs auf der ersten Ebene;
  b Kosten eines Sprungs auf der zweiten Ebene;
  c Kosten für einen sequentiellen Vergleich

Verbesserung durch optimale Abstimmung der Sprungweiten m_1 und m_2 der beiden Ebenen

- Mit a = b = c ergeben sich als optimale Sprungweiten $m_1 = n^{\frac{2}{3}}$ und $m_2 = n^{\frac{1}{3}}$
- mittlere Suchkosten: $C_{avg}(n) = \frac{3}{2} \cdot a \cdot n^{\frac{1}{3}}$

Verallgemeinerung zu n-Ebenen-Verfahren ergibt ähnlich günstige Kosten wie Binärsuche (Übereinstimmung bei $\log_2 n$ Ebenen)

Sprungsuche vorteilhaft, wenn Binärsuche nicht anwendbar ist (z.B. bei blockweisem Einlesen der sortierten Sätze vom Externspeicher)

Exponentielle Suche

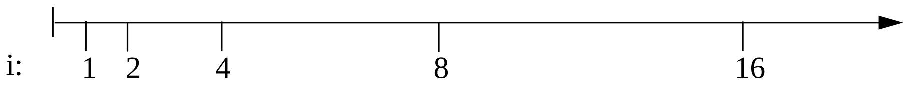
Anwendung, wenn Länge des Suchbereichs n zunächst unbekannt bzw. sehr groß

Vorgehensweise

- für Suchschlüssel x wird zunächst obere Grenze für den zu durchsuchenden Abschnitt bestimmt

```
int i = 1; while (x > L[i]) i=2*i;
```

- Für i > 1 gilt für den auf diese Weise bestimmten Suchabschnitt: `L[i/2] < x <= L[i]`
- Suche innerhalb des Abschnitts mit irgendeinem Verfahren



enthält die sortierte Liste nur positive, ganzzahlige Schlüssel ohne Duplikate, wachsen Schlüsselwerte mindestens so stark wie die Indizes der Elemente

=> i wird höchstens $\log_2 x$ mal verdoppelt

- Bestimmung des gesuchten Intervalls erfordert maximal $\log_2 x$ Schlüsselvergleiche
- Suche innerhalb des Abschnitts (z.B. mit Binärsuche) erfordert auch höchstens $\log_2 x$ Schlüsselvergleiche

Gesamtaufwand $O(\log_2 x)$

Interpolationssuche

Schnellere Lokalisierung des Suchbereichs in dem Schlüsselwerte selbst betrachtet werden, um “Abstand” zum Suchschlüssel x abzuschätzen

nächste Suchposition *pos* wird aus den Werten *ug* und *og* der Unter- und Obergrenze des aktuellen Suchbereichs wie folgt berechnet:

$$pos = ug + \frac{x - L[ug]}{L[og] - L[ug]} \cdot (og - ug)$$

sinnvoll, wenn Schlüsselwerte im betreffenden Bereich einigermaßen gleichverteilt

- erfordert dann im Mittel lediglich $log_2 log_2 n + 1$ Schlüsselvergleiche

im schlechtesten Fall (stark ungleichmäßige Werteverteilung) entsteht jedoch linearer Suchaufwand (O(n))

Auswahlproblem

Finde das i-kleinste Element in einer Liste L mit n Elementen

- Spezialfälle: kleinster Wert, größter Wert, mittlerer Wert (Median)

trivial bei sortierter Liste

unsortierter Liste: Minimum/Maximum-Bestimmung erfordert lineare Kosten O (n)

einfache Lösung für i-kleinstes Element:

- j = 0
- solange j < i: Bestimme kleinstes Element in L und entferne es aus L ; erhöhe j um 1
- gebe Minimum der Restliste als Ergebnis zurück

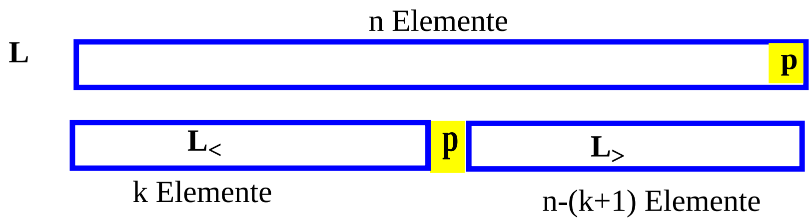
Komplexität:

schneller: Sortieren + Auswahl

Auswahlproblem (2)

Divide-and-Conquer-Strategie (i-kleinstes Element von n paarweise unterschiedlichen Elementen)

- bestimme Pivot-Element p
- Teile die n Elemente bezüglich v in 2 Gruppen: Gruppe 1 enthält die k Elemente die kleiner sind als v; Gruppe 2 die n-k-1 Elemente, die größer als p sind
- falls i=k+1, dann ist p das Ergebnis.
  falls i <= k wende das Verfahren rekursiv auf Gruppe 1 an;
  falls i > k+1: verwende Verfahren rekursiv zur Bestimmung des i - (k+1)-te Element in Gruppe 2

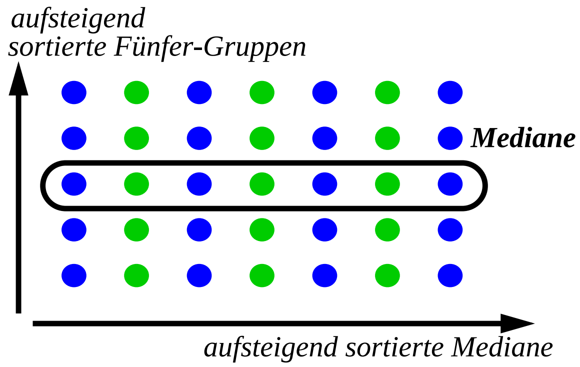


Laufzeit:

Auswahlproblem (3)

Lösung des Auswahlproblems mit linearen Kosten: Median-of-Median-Strategie:

- falls n < Konstante, berechne i-kleinstes Element direkt und beende Algorithmus
  Sonst:
- teile die n Elemente in n/5 Gruppen zu je 5 Elementen und höchstens eine Gruppe mit höchstens vier Elemente auf) -> *lineare Kosten*
- sortiere jede dieser Gruppen (in konstanter Zeit) und bestimme in jeder Gruppe das mittlere Element (Median) -> *lineare Kosten*



- wähle Verfahren rekursiv auf die Mediane an und bestimme das mittlere Element p (Median der Mediane) -> Pivot-Element
- Teile die n Elemente bezüglich p in 2 Gruppen: Gruppe 1 enthält die k Elemente die kleiner sind als p; Gruppe 2 die n-k-1 Elemente, die größer als p sind
- falls i=k+1, dann ist p das Ergebnis.
  falls i <= k wende das Verfahren rekursiv auf Gruppe 1 an;
  falls i > k+1: verwende Verfahren rekursiv zur Bestimmung des i - (k+1)-te Element in Gruppe 2

Zusammenfassung

Sequentielle Suche

- Default-Ansatz zur Suche
- lineare Kosten O (n)

Binärsuche

- setzt Sortierung voraus
- Divide-and-Conquer-Strategie
- wesentlich schneller als sequentielle Suche
- Komplexität: O (log n)

Weitere Suchverfahren auf sortierten Arrays für Sonderfälle

- Fibonacci-Suche
- Sprungsuche
- exponentielle Suche
- Interpolationssuche

Auswahlproblem auf unsortierter Eingabe mit linearen Kosten lösbar